

ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ ΣΕΜΦΕ, 2/6/2025

1. (1+1+1=3 μον) Βρείτε την σωστή απάντηση (με την απαραίτητη δικαιολόγηση).

(α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } y = 0 \\ 1, & \text{αν } x \neq 0 \text{ και } y \neq 0 \end{cases}$. Τότε

(1) Το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει. (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^2 . Αν $f_x = f_y$ τότε (1) $f_{xx} = f_{yy}$ (2) $f_{xx} = -f_{yy}$ (3) Κανένα από τα προηγούμενα.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^2 . Αν $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0$ και $f_{xx}(x, y) \neq 0$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε (1) Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα (2) Η f έχει ένα μοναδικό τοπικό ακρότατο (3) Δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν η f έχει ή όχι τοπικά ακρότατα.

Λύση. (α) Η σωστή απάντηση είναι η (1): Το όριο της f κατά μήκος του x -άξονα (ή του y -άξονα) είναι το μηδέν ενώ κατά μήκος κάθε άλλης ευθείας που διέρχεται από το $(0, 0)$ είναι η μονάδα. Άρα το όριο της f στο $(0, 0)$ δεν υπάρχει.

(β) Η σωστή απάντηση είναι η (1): Έχουμε

$$f_x = f_y \Rightarrow (f_x)_y = (f_y)_y \Rightarrow f_{xy} = f_{yy}$$

Ομοίως

$$f_x = f_y \Rightarrow (f_x)_x = (f_y)_x \Rightarrow f_{xx} = f_{yx}$$

Επειδή η f είναι κλάσης C^2 από το Θεώρημα Schwarz, $f_{yx} = f_{xy}$. Άρα

$$f_{xx} = f_{yx} = f_{xy} = f_{yy}$$

(γ) Η σωστή απάντηση είναι η (1): εφόσον η f είναι C^2 είναι και παραγωγίσιμη και συνεπώς κάθε τοπικό ακρότατο της f (αν υπάρχει) θα είναι και κρίσιμο σημείο της. Όμως από τις υποθέσεις μας $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = -f_{xx}^2(x, y) - f_{xy}^2(x, y) < 0$ και άρα από το Κριτήριο της 2ης παραγώγου κάθε κρίσιμο σημείο είναι σαγματικό σημείο της f .

2. (1+1+1=3μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^4}}$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου δείξτε ότι η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ υπάρχει για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Υπολογίστε τις $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ και εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση. (α) Για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^4}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \cdot y$$

Επειδή $\left| \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \right| \leq 1$ και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$ έπεται ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Άρα η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(t^2 u_1^2)(tu_2)}{\sqrt{t^4 u_1^4 + t^4 u_2^4}}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^3 \sqrt{u_1^4 + u_2^4}} = \frac{u_1^2 u_2}{\sqrt{u_1^4 + u_2^4}}.$$

(γ) Έχουμε $f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0) = 0$ και ομοίως $f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0) = 0$. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = 0$$

άτοπο από το (β). Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

3. (1+1=2 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = \sin(xy)$ (α) Βρείτε τις μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης της f . (β) Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$.

Λύση. (α) $f_x(x,y) = y \cos(xy)$, $f_y(x,y) = x \cos(xy)$, $f_{xx}(x,y) = -y^2 \sin(xy)$, $f_{yy}(x,y) = -x^2 \sin(xy)$, $f_{xy}(x,y) = (f_x)_y = \cos(xy) - xy \sin(xy)$.

(β) Από το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (1)$$

και ομοίως

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{x^2 + y^2} = 0 \quad (2)$$

Από το (α), $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{yy}(0,0) = 0$, $f_{xy}(0,0) = 1$ και άρα τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι

$$T_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 0 + 0x + 0y = 0$$

και

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2} [f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] = \frac{1}{2} [0x^2 + 2xy + 0y^2] = xy$$

Άρα οι (1) και (2) γράφονται

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

και

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Όμως το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει. Πράγματι κατά μήκος της $y = x$ ισούται με $1/2$ ενώ κατά μήκος της $y = 0$ ισούται με το 0. Συνεπώς ούτε το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ υπάρχει.

4. (2 μον.) Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 4x^3 - 2x + 2y \\f_y(x, y) &= 4y^3 - 2y + 2x \\f_{xx}(x, y) &= 12x^2 - 2 \\f_{yy}(x, y) &= 12y^2 - 2 \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 2\end{aligned}$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 4x^3 - 2x + 2y = 0 \\f_y(x, y) &= 4y^3 - 2y + 2x = 0\end{aligned}$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 + y^3 = 0$ ή ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0$ και άρα

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0, 0), \quad (1, -1) \quad \text{και} \quad (-1, 1).$$

Έχουμε

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = (12x^2 - 2) \cdot (12y^2 - 2) - 4$$

(1) $\Delta(0, 0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Παρατηρούμε ότι

$$(\alpha) \quad f(0, 0) = 0,$$

$$(\beta) \quad \text{για κάθε σημείο } (x, y) \neq (0, 0) \text{ του } x\text{-άξονα με } x \in (-1, 1) \text{ είναι } f(x, 0) = x^4 - x^2 < 0 \text{ και}$$

$$(\gamma) \quad \text{για κάθε σημείο } (x, y) \neq (0, 0) \text{ της ευθείας } y = x \text{ είναι } f(x, y) = f(x, x) = 2x^4 > 0.$$

Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-1, 1) = \Delta(1, 1) = 96 > 0$$

και $f_{xx}(-1, 1) = f_{xx}(1, -1) = 10 > 0$ οπότε στα σημεία $(-1, 1)$ και $(1, -1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

5. (1 μον) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + y + z$ υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Λύση. Έστω (x_0, y_0, z_0) τοπικό ακρότατο της $f(x, y, z) = x + y + z$ υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Από το Θεώρημα Lagrange το (x_0, y_0, z_0) είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}(1, 1, 1) &= (\lambda 2x, \lambda 2y, \lambda 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3\end{aligned}$$

Άρα $\lambda \neq 0$, $x = y = z (= 1/2\lambda)$ και $3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρόατα της f υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, είναι τα σημεία

$$(1, 1, 1) \quad \text{και} \quad (-1, -1, -1)$$

Η f ως συνεχής συνάρτηση επί κλειστού και φραγμένου υποσυνόλου του $\mathbb{R}^3$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Επειδή $f(-1, -1, -1) = -3$ και $f(1, 1, 1) = 3$ έπεται ότι στο $(-1, -1, -1)$ λαμβάνεται η ελάχιστη και στο $(1, 1, 1)$ η μέγιστη τιμή της f πάνω στην σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

6. (1 μον) Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη σε ανοικτό διάστημα I του $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = x^{f(x)}$, για όλα τα $x \in I$.

Λύση. Θέτοντας $y = f(x)$ έχουμε $y = x^y \iff x^y - y = 0$. Θέτουμε $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x, y) = x^y - y.$$

Έχουμε

$$F_x(x, y) = yx^{y-1} \quad \text{και} \quad F_y(x, y) = \ln x \cdot x^y - 1$$

και άρα η F είναι C^1 . Επίσης,

$$F(1, 1) = 0 \quad \text{και} \quad F_y(1, 1) = -1 \neq 0.$$

Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης η F λύνεται στο $(1, 1)$ ως προς y , δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα X και Y με κέντρα τα $x_0 = 1$ και $y_0 = 1$ αντίστοιχα, και μια C^1 συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$, για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Συνεπώς, $f(1) = 1$ και $F(x, f(x)) = 0 \iff x^{f(x)} - f(x) = 0 \iff f(x) = x^{f(x)}$, για κάθε $x \in X$.

Τυπολόγιο

- Παράγωγος κατά κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ στο $(0, 0)$: $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t}$
- Πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$:

$$T_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y, \quad T_2(x, y) = T_1(x, y) + \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2]$$