

Κυρτή Ανάλυση (2024–25)

Ασκήσεις – Φυλλάδιο 4

(Ημερομηνία παράδοσης: 10 Ιουνίου 2025)

1. Έστω K και T δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι

$$d(K, T) = \|h_K - h_T\|_\infty = \max\{|h_K(\theta) - h_T(\theta)| : \theta \in S^{n-1}\}.$$

2. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι:

(α) Για κάθε $t > 0$ υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_N \in K$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $y \in K$ υπάρχει $j \in \{1, \dots, N\}$ ώστε $\|y - x_j\|_2 \leq t$.

(β) Για κάθε $t > 0$ υπάρχει πολύτοπο P στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $P \subseteq K \subseteq P + tB_2^n$.

3. Έστω $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ και K κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι $d(K_m, K) \rightarrow 0$ αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα τα εξής:

(α) Κάθε $x \in K$ είναι το όριο μιας ακολουθίας $\{x_m\}$ με $x_m \in K_m$.

(β) Αν $\{K_{m_j}\}$ είναι μια υποακολουθία της $\{K_m\}$, αν $x_{m_j} \in K_{m_j}$ και $x_{m_j} \rightarrow x$, τότε $x \in K$.

4. (α) Έστω K και T δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με $T \subset \text{int}(K)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν M είναι ένα κυρτό σώμα με $d(K, M) < \varepsilon$ τότε $T \subseteq M$.

(β) Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $r > 1$ υπάρχει πολύτοπο P στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $P \subseteq K \subseteq rP$.

5. Δίνονται $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) ώστε

$$I = \sum_{j=1}^m x_j \otimes x_j.$$

(α) Αποδείξτε ότι $\sum_{j=1}^m |x_j|^2 = n$.

(β) Αποδείξτε ότι, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \dots, a_m$,

$$\left| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^m a_j^2 \right)^{1/2}.$$

6. (α) Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\|x\|_q \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|x\|_q.$$

(β) Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή, αποδείξτε ότι

$$d(\ell_2^n, \ell_q^n) \leq n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}.$$

7. (α) Αποδείξτε ότι: αν $y_1, \dots, y_m \in \ell_2^n$ τότε

$$\sum_{j=1}^m \|y_j\|_2^2 = \text{Ave}_{\varepsilon=\pm 1} \left\| \sum_{j=1}^m \varepsilon_j y_j \right\|_2^2,$$

όπου με Ave συμβολίζουμε το μέσο όρο ως προς όλες τις δυνατές επιλογές προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$.

(β) Έστω $2 \leq q \leq \infty$ και έστω $T : \ell_q^n \rightarrow \ell_2^n$ ισομορφισμός, με $\|T : \ell_q^n \rightarrow \ell_2^n\| = 1$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{j=1}^n \|Te_j\|_2^2 \leq n^{2/q},$$

και συμπεράνατε ότι $\|Te_j\|_2 \leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$ για κάποιον $j \leq n$.

(γ) Αποδείξτε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_2^n \rightarrow \ell_q^n\| \geq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

(δ) Έστω $2 \leq q \leq \infty$. Αποδείξτε ότι

$$d(\ell_2^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

8. Έστω $T : \ell_1^n \rightarrow \ell_\infty^n$ ισομορφισμός, ο οποίος ικανοποιεί την

$$\frac{1}{d} B_\infty^n \subseteq T(B_1^n) \subseteq B_\infty^n,$$

όπου B_∞^n, B_1^n οι μοναδιαίες μπάλες των ℓ_∞^n, ℓ_1^n αντίστοιχα.

(α) Αν $x_j = T(e_j)$, $j = 1, \dots, n$, αποδείξτε ότι

$$|T(B_1^n)| = \frac{2^n}{n!} |\det X|,$$

όπου X ο πίνακας με στήλες τα $x_1, \dots, x_n$. [Υπόδειξη: Αρκεί να δείξετε ότι $|B_1^n| = 2^n/n!$.]

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $x_1, \dots, x_n \in B_\infty^n$ και την ανισότητα Hadamard, αποδείξτε ότι $|\det X| \leq n^{n/2}$.

(γ) Αποδείξτε ότι $d \geq c_1 \sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από τον T και από το n .

(δ) Αποδείξτε ότι $d(\ell_1^n, \ell_\infty^n) \geq c_1 \sqrt{n}$, όπου $c_1 > 0$ η σταθερά στο (γ).