

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
 9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Έστω D ένα χωρίο του $\mathbb{R}^2$ στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα Green. Αν η $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αρμονική, δηλαδή $f_{xx} + f_{yy} = 0$, να αποδείξετε ότι για την $\vec{F} = (-f_y, f_x)$ ισχύει ότι $\int_{\partial D} \vec{F} = 0$.

Υπόδειξη: Οι $P = -f_y$ και $Q = f_x$ είναι κλάσης C^1 στο D . Από το θεώρημα Green,

$$\int_{\partial D} \vec{F} = \int_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

Υπολογίζουμε τις $Q_x = f_{xx}$ και $P_y = -f_{yy}$, απ' όπου παίρνουμε $Q_x - P_y = f_{xx} + f_{yy} \equiv 0$, διότι η f είναι αρμονική. Έπεται ότι $\int_{\partial D} \vec{F} = 0$. □

Άσκηση 2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας S με

$$S^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}.$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε το $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 4\}$ και την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, f(u, v))$, όπου $f(u, v) = u^2 + v^2$. Τότε, $S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = (-2u, -2v, 1)$. Άρα,

$$\begin{aligned} \text{Εμβ}(S) &= \int_S \mathbf{1} dS = \iint_{\Delta} \|S_u \times S_v\| du dv = \iint_{\Delta} \sqrt{4(u^2 + v^2) + 1} du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\phi = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_1^{17} \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_1^{17} = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1). \end{aligned}$$

□

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S \vec{F} \cdot dS$, όπου S η επιφάνεια του στερεού κύβου $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ και $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε την απόκλιση

$$\text{div } \vec{F} = 2(x + y + z).$$

Από το θεώρημα Gauss έχουμε

$$\int_S \vec{F} \cdot dS = \iiint_D \text{div } \vec{F} dx dy dz = 2 \iiint_D (x + y + z) dx dy dz.$$

Υπολογίζουμε τα

$$\begin{aligned} \iiint_D x dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^1 x dx \right) dy dz = \frac{1}{2} \\ \iiint_D y dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^1 y dy \right) dx dz = \frac{1}{2} \\ \iiint_D z dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^1 z dz \right) dx dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Συνεπώς, } \int_S \vec{F} \cdot dS = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 3.$$

□

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S \vec{F} \cdot dS$, όπου $\vec{F}(x, y, z) = (y + x, x + z, z^2)$ και S η επιφάνεια του κώνου $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $z = 0$ και $z = 2$.

Υπόδειξη: Θεωρούμε το στερεό $K = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, 0 \leq z \leq 2\}$. Το σύνορο Σ του K γράφεται ως $\Sigma = S \cup S_1$, όπου $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, z = 2\}$. Θέτουμε $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Από το θεώρημα Gauss έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot dS &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_K (1 + 0 + 2z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (2z + 1) dz \right) dx dy \\ &= \iint_D (4 - (x^2 + y^2) + 2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6 - r^2 - r) r dr d\phi \\ &= 2\pi \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr = 2\pi \left(3 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} \right) = 2\pi \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

Μια παραμέτρηση της S_1 είναι η $S_1(u, v) = (u, v, 2)$, ορισμένη στο D . Υπολογίζουμε το $S_u \times S_v = (0, 0, 1)$, το οποίο «δείχνει» προς τα έξω. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{F} \cdot dS &= \iint_D \vec{F}(S_1(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv \\ &= \iint_D (u + v, u + 2, 4) \cdot (0, 0, 1) du dv = \iint_D 4 du dv = 4 \operatorname{Εμβα}(D) = 16\pi. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_S \vec{F} \cdot dS = \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot dS - \int_{S_1} \vec{F} \cdot dS = \frac{32\pi}{3} - 16\pi = -\frac{16\pi}{3}.$$

□

Άσκηση 5. Με χρήση του θεωρήματος Gauss, να υπολογίσετε τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y, z) = (x^3/3, y^3/3, xy)$ διαμέσου της επιφάνειας του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \quad z = 1.$$

Υπόδειξη: Έχουμε $S^* : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $z = 1$. Η S είναι το σύνορο του στερεού $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\}$. Από το θεώρημα Gauss έχουμε

$$\int_S \vec{F} \cdot dS = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz.$$

Αν ορίσουμε $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ τότε $(x, y, z) \in K$ αν και μόνο αν $(x, y) \in \Delta$ και $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$. Επίσης, $\operatorname{div} \vec{F} = x^2 + y^2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz &= \iint_{\Delta} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2 + y^2) dz \right) dx dy = \iint_{\Delta} [(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^{3/2}] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 - r^3) r dr d\phi = 2\pi \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 6. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 e^z + x, y - x e^z, x^2 - 2x e^z)$. Με κατάλληλη χρήση του θεωρήματος Gauss, να υπολογίσετε τη ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της ανοικτής επιφάνειας S με

$$S^* = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε την κλειστή επιφάνεια Σ με $\Sigma^* = S^* \cup S_1^*$, όπου $S_1^* = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$. Για τη ροή Φ_{Σ} του $\vec{F}$ διαμέσου της Σ μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Gauss:

$$\Phi_{\Sigma} = \iiint_{\Sigma} \vec{F} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_K (2xe^z + 1 + 1 - 2xe^z) dx dy dz = 2 \iiint_K 1 dx dy dz = 2V(K),$$

όπου $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ το άνω στερεό ημισφαίριο. Άρα,

$$\iiint_{\Sigma} \vec{F} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Υπολογίζουμε τώρα τη ροή Φ_{S_1} διαμέσου της S_1 . Μια παραμέτρηση είναι η $S_1 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S_1(u, v) = (u, v, 0)$, όπου $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Έχουμε $S_u \times S_v = (0, 0, 1)$, το οποίο «δείχνει» στο εσωτερικό, άρα $\vec{n}(u, v) = (0, 0, -1)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \Phi_{S_1} &= \iint_{\Delta} \vec{F}(u, v, 0) \cdot (0, 0, -1) du dv = \iint_{\Delta} (u^2 + u, v - u, u^2 - 2u) \cdot (0, 0, -1) du dv \\ &= \iint_{\Delta} (2u - u^2) du dv = 2 \iint_{\Delta} u du dv - \iint_{\Delta} u^2 du dv \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos \phi dr d\phi - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \phi dr d\phi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \cdot \int_0^1 r^2 dr - \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \cdot \int_0^1 r^3 dr \\ &= 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} - \pi \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι η ροή Φ_S του $\vec{F}$ διαμέσου της S ισούται με

$$\Phi_S = \Phi_{\Sigma} - \Phi_{S_1} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{19\pi}{12}.$$

□

Άσκηση 7. Υπολογίστε τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y, z) = \left(e^z, \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{3/2}, \cos(y^2)\right)$ διαμέσου της επιφάνειας που είναι το σύνορο του στερεού

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε την απόκλιση

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 + \frac{1}{3} \frac{3}{2} (x^2 + y^2)^{3/2-1} 2y + 0 = y\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Από το θεώρημα Gauss, η ζητούμενη ροή ισούται με

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} &= \iiint_K y\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iint_D \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) y\sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \iint_D y(x^2 + y^2)^{3/2} dx dy, \end{aligned}$$

όπου $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$. Θέτουμε $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, όπου (κάνετε ένα σχήμα) $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ και $r^2 \leq 2r \cos \phi$, δηλαδή $0 \leq r \leq 2 \cos \phi$. Έχουμε $J = r$, άρα

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \phi} r^5 \sin \phi dr \right) d\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2^6 \cos^6 \phi}{6} \sin \phi d\phi = 0,$$

διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση $g(\phi) = \frac{2^6 \cos^6 \phi}{6} \sin \phi$ είναι περιττή.

□

Άσκηση 8. Να αποδείξετε ότι η ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y, z) = (ax, by, cz)$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας S που αποτελεί το σύνορο ενός χωρίου K στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα απόκλισης, είναι ίση με $(a + b + c)V(K)$, όπου $V(K)$ είναι ο όγκος του χωρίου K .

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε την απόκλιση

$$\operatorname{div} \vec{F} = a + b + c.$$

Από το θεώρημα Gauss έχουμε

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_K (a + b + c) \, dx \, dy \, dz = (a + b + c) \iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= (a + b + c)V(K). \end{aligned}$$

□

Άσκηση 9. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^2 και έστω $\vec{F} = \phi \nabla \phi$.

(α) Υπολογίστε τα $\operatorname{div} \vec{F}$ και $\operatorname{rot} \vec{F}$.

(β) Εξετάστε αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό και υπολογίστε το έργο του $\vec{F}$ σε μια κλειστή διαδρομή,

(γ) Αν επιπλέον $\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$, αποδείξτε ότι η προς τα έξω ροή του $\vec{F}$ μέσω της επιφάνειας μιας σφαίρας στον $\mathbb{R}^3$ είναι θετική.

Υπόδειξη: (α) Έχουμε $\vec{F} = (\phi\phi_x, \phi\phi_y, \phi\phi_z) =: (P, Q, R)$. Υπολογίζουμε την απόκλιση

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= P_x + Q_y + R_z = (\phi_x^2 + \phi\phi_{xx}) + (\phi_y^2 + \phi\phi_{yy}) + (\phi_z^2 + \phi\phi_{zz}) \\ &= (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + \phi \cdot (\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}). \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y).$$

Η ϕ είναι C^2 , άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Schwarz για την ισότητα των μεικτών παραγώγων. Έτσι, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} R_y - Q_z &= (\phi\phi_z)_y - (\phi\phi_y)_z = \phi_y\phi_z + \phi\phi_{zy} - \phi_z\phi_y - \phi\phi_{yz} = 0 \\ P_z - R_x &= (\phi\phi_x)_z - (\phi\phi_z)_x = \phi_z\phi_x + \phi\phi_{xz} - \phi_x\phi_z - \phi\phi_{zx} = 0 \\ Q_x - P_y &= (\phi\phi_y)_x - (\phi\phi_x)_y = \phi_x\phi_y + \phi\phi_{yx} - \phi_y\phi_x - \phi\phi_{xy} = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\operatorname{rot} \vec{F} = (0, 0, 0)$.

(β) Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο, από το (α), στο απλά συνεκτικό χωρίο $\mathbb{R}^3$. Άρα, το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό: υπάρχει $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\vec{F} = \nabla f$. Έπεται ότι, για κάθε κλειστή διαδρομή $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ έχουμε

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$$

(γ) Από το θεώρημα απόκλισης του Gauss, η προς τα έξω ροή του $\vec{F}$ μέσω της επιφάνειας S μιας μπάλας D στον $\mathbb{R}^3$ ισούται με

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_D [(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + \phi \cdot (\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz})] \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_D (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) \, dx \, dy \, dz \geq 0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε εδώ το γεγονός ότι, από την υπόθεση, $\phi(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) \equiv 0$, και, στη συνέχεια, την $\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 \geq 0$. $\square$

Άσκηση 10. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (0, 0, z^3)$ και την επιφάνεια S που είναι το σύνορο του στερεού K που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{και} \quad z = 8 - x^2 - y^2.$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε το $\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 4\}$ και τις $S_1, S_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S_1(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ και $S_2(u, v) = (u, v, 8 - u^2 - v^2)$. Έχουμε $S^* = S_1^* \cup S_2^*$ και το $S_1^* \cap S_2^* = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, z = 4\}$ έχει έμβαδόν 0. Συνεπώς, η ροή διαμέσου της S ισούται με το άθροισμα των ροών διαμέσου των S_1, S_2 .

Έστω Φ_1 η ροή διαμέσου της S_1 . Αν $f(u, v) = u^2 + v^2$ τότε $S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = (-2u, -2v, 1)$. Το διάνυσμα $(S_u \times S_v)(0, 0) = (0, 0, 1)$ «δείχνει» στο εσωτερικό της S_1 αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_1(0, 0) = (0, 0, 0)$, άρα $\vec{n}_1(u, v) = (2u, 2v, 1)$. Έπεται ότι

$$\Phi_1 = - \iint_{\Delta} (u^2 + v^2)^3 du dv = - \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^7 dr d\phi = -2\pi \frac{2^8}{8} = -64\pi.$$

Έστω Φ_2 η ροή διαμέσου της S_2 . Αν $g(u, v) = 8 - u^2 - v^2$ τότε $S_u \times S_v = (-g_u, -g_v, 1) = (2u, 2v, 1)$. Το διάνυσμα $(S_u \times S_v)(0, 0) = (0, 0, 1)$ «δείχνει» στο εξωτερικό της S_2 αν σχεδιαστεί με αρχή το $S_2(0, 0) = (0, 0, 8)$, άρα $\vec{n}_2(u, v) = (2u, 2v, 1)$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \iint_{\Delta} \vec{F}(S_2(u, v)) \cdot \vec{n}_2(u, v) du dv = \iint_{\Delta} (8 - u^2 - v^2)^3 du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - r^2)^3 r dr d\phi = 2\pi \int_0^2 (8 - r^2)^3 r dr \\ &= \pi \int_4^8 w^3 dw = \frac{\pi}{4} (8^4 - 4^4) = \frac{\pi}{4} 4^4 (2^4 - 1) = 15 \cdot 64\pi. \end{aligned}$$

Η συνολική ροή ισούται με $\Phi_1 + \Phi_2 = 14 \cdot 64\pi = 7 \cdot 2^7 \cdot \pi = 896\pi$.

Υπολογίζουμε τώρα το

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_K 3z^2 dx dy dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 3z^2 dz \right) dx dy,$$

όπου $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Περνώντας σε πολικές συντεταγμένες ως προς (x, y) , έχουμε

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\int_{r^2}^{8-r^2} 3z^2 dz \right) r dr d\phi = 2\pi \int_0^2 [(8 - r^2)^3 - r^6] r dr \\ &= 2\pi \int_0^2 (2^9 r - 3 \cdot 2^6 r^3 + 3 \cdot 2^3 r^5 - 2r^7) dr \\ &= 2\pi \left(2^9 \cdot \frac{2^2}{2} - 3 \cdot 2^6 \frac{2^4}{4} + 3 \cdot 2^3 \cdot \frac{2^6}{6} - 2 \cdot \frac{2^8}{8} \right) = 2\pi (2^{10} - 3 \cdot 2^8 + 2^8 - 2^6) \\ &= 2\pi (2^{10} - 2^9 - 2^6) = 2\pi \cdot 2^6 (2^4 - 2^3 - 1) = 2\pi \cdot 2^6 \cdot 7 = 7 \cdot 2^7 \cdot \pi = 896\pi. \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 11. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (x, y, z)$ και το στερεό K που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ και τα επίπεδα $z = 0$ και $z = x + 2$.

Υπόδειξη: Έχουμε $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x + 2\}$. Θέτουμε $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz &= 3 \iiint_K \mathbf{1} \, dx \, dy \, dz = 3 \iint_D \left(\int_0^{x+2} \mathbf{1} \, dz \right) \, dx \, dy = 3 \iint_D (x+2) \, dx \, dy \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \phi + 2) r \, dr \, d\phi = 3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \cos \phi + 1 \right) \, d\phi = 6\pi. \end{aligned}$$

Γράφουμε το σύνορο του K ως $S^* = S_1^* \cup S_2^* \cup S_3^*$, όπου $S_1^* : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq x + 2$, $S_2^* : x^2 + y^2 \leq 1, z = x + 2$ και $S_3^* : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$. Θα δείξουμε ότι

$$\int_S \vec{F} = \int_{S_1} \vec{F} + \int_{S_2} \vec{F} + \int_{S_3} \vec{F} = 6\pi.$$

Μια παραμέτρηση της S_1 είναι η $S_1(\phi, z) = (\cos \phi, \sin \phi, z)$, ορισμένη στο $\Delta_1 = \{(\phi, z) : 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \cos \phi + 2\}$. Υπολογίζουμε το $S_\phi \times S_z = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, το οποίο «δείχνει» προς τα έξω, άρα $\vec{n}(\phi, z) = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{F} &= \iint_{\Delta_1} \vec{F}(S_1(\phi, z)) \cdot \vec{n}(\phi, z) \, d\phi \, dz \\ &= \iint_{\Delta_1} (\cos \phi, \sin \phi, z) \cdot (\cos \phi, \sin \phi, 0) \, d\phi \, dz \\ &= \iint_{\Delta_1} \mathbf{1} \, d\phi \, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\cos \phi + 2} \mathbf{1} \, dz \right) \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \phi + 2) \, d\phi = 4\pi. \end{aligned}$$

Μια παραμέτρηση της S_2 είναι η $S_2(u, v) = (u, v, f(u, v))$, όπου $f(u, v) = u + 2$, ορισμένη στο $\Delta_2 = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Υπολογίζουμε το $S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = (-1, 0, 1)$, το οποίο «δείχνει» προς τα έξω διότι $(S_u \times S_v) \cdot S(0, 0) = (-1, 0, 1) \cdot (0, 0, 2) = 2 > 0$, άρα $\vec{n}(u, v) = (-1, 0, 1)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \vec{F} &= \iint_{\Delta_2} \vec{F}(S_2(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Delta_2} (u, v, u+2) \cdot (-1, 0, 1) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Delta_2} (-u + u + 2) \, du \, dv = 2\operatorname{Eμβ}(\Delta_2) = 2\pi. \end{aligned}$$

Μια παραμέτρηση της S_3 είναι η $S_3(u, v) = (u, v, 0)$, ορισμένη στο $\Delta_3 = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Υπολογίζουμε το $S_u \times S_v = (0, 0, 1)$, το οποίο «δείχνει» προς τα έξω. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{S_3} \vec{F} &= \iint_{\Delta_3} \vec{F}(S_3(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Delta_3} (u, v, 0) \cdot (0, 0, 1) \, du \, dv \\ &= \iint_{\Delta_3} \mathbf{0} \, du \, dv = 0. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας βλέπουμε ότι, πράγματι,

$$\int_S \vec{F} = \int_{S_1} \vec{F} + \int_{S_2} \vec{F} + \int_{S_3} \vec{F} = 4\pi + 2\pi + 0 = 6\pi.$$

□

Άσκηση 12. Με χρήση του θεωρήματος Stokes να υπολογίσετε τη ροή του $\text{rot } \vec{F}$ διαμέσου της επιφάνειας S , όπου $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2 + xy)$ και S^* είναι το τμήμα της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ που βρίσκεται μέσα στον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Υπόδειξη: Η S προσδιορίζεται από τις $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ και $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Λύνοντας το σύστημα $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ και $z^2 = x^2 + y^2$ βλέπουμε ότι το σύνορο της S είναι η καμπύλη $C : x^2 + y^2 = 1, z = 1$ προσανατολισμένη θετικά. Από το θεώρημα Stokes έχουμε ότι

$$\int_S \text{rot } \vec{F} = \int_C \vec{F} = \int_C (-y dx + x dy)$$

αφού $z = 1 \implies dz = 0$ πάνω στην C . Θέτουμε $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Από το θεώρημα Green,

$$\int_C (-y dx + x dy) = - \iint_D (1 - (-1)) dx dy = -2\text{Εμβα}(D) = -2\pi.$$

□

Άσκηση 13. Με χρήση του θεωρήματος Stokes να δείξετε ότι

$$\int_C (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz = 2\pi ab^2,$$

όπου C είναι η τομή του ημισφαιρίου

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax, \quad z \geq 0$$

και του κυλίνδρου

$$x^2 + y^2 = 2bx,$$

όπου $0 < b < a$. Δίνεται ότι η C προσανατολίζεται αρνητικά ως προς το μέρος του κυλίνδρου που βρίσκεται μέσα στο ημισφαίριο.

Υπόδειξη: Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_C \vec{F}$, όπου $\vec{F} = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$. Θεωρούμε το

$$\Delta = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 2bu\} = \{(u, v) : (u - b)^2 + v^2 \leq b^2\}$$

και την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, f(u, v))$, όπου $f(u, v) = \sqrt{2au - u^2 - v^2}$. Η C είναι το σύνορο του S^* . Υπολογίζουμε το $S_u \times S_v = (-f_u, -f_v, 1) = \left(\frac{y-a}{f}, \frac{v}{f}, 1\right)$ και παρατηρούμε ότι

$$(S_u \times S_v) \cdot S(u, v) = \frac{u^2 - au + v^2 + f^2}{f} = \frac{au}{f} \geq 0,$$

άρα το $S_u \times S_v$ «δείχνει» προς τα έξω και $\vec{n}(u, v) = \left(\frac{u-a}{f}, \frac{v}{f}, 1\right)$. Υπολογίζουμε επίσης το $\text{rot } \vec{F} = 2(y - z, z - x, x - y)$. Από το θεώρημα Stokes,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} &= \iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv = 2 \iint_{\Delta} (v - f, f - u, u - v) \cdot \left(\frac{u-a}{f}, \frac{v}{f}, 1\right) du dv \\ &= 2 \iint_{\Delta} \frac{a(f - v)}{f} du dv = 2a\text{Εμβα}(\Delta) - 2a \iint_{\Delta} \frac{v}{f(u, v)} du dv \\ &= 2\pi ab^2 - 2a \iint_{\Delta} \frac{v}{f(u, v)} du dv. \end{aligned}$$

Γράφουμε σε πολικές συντεταγμένες το

$$\iint_{\Delta} \frac{v}{f(u, v)} du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^b r^2 g_r(\phi) dr d\phi,$$

όπου

$$g_r(\phi) = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2(a-b)(b+r \cos \phi) + b^2 - r^2}}.$$

Παρατηρούμε ότι $g_r(2\pi - \phi) = -g_r(\phi)$, απ' όπου, με την αλλαγή μεταβλητής $\theta = 2\pi - \phi$, βλέπουμε ότι

$$\int_{\pi}^{2\pi} g_r(\phi) d\phi = \int_0^{\pi} g_r(2\pi - \theta) d\theta = - \int_0^{\pi} g_r(\theta) d\theta,$$

και έτσι $\int_0^{2\pi} g_r(\phi) d\phi = 0$ για κάθε $r \in [0, b]$. Άρα, $\iint_{\Delta} \frac{v}{f(u, v)} du dv = 0$ και, τελικά,

$$\int_C \vec{F} = 2\pi ab^2.$$

□

Άσκηση 14. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{2}(z^2, x^2, y^2)$ και την επιφάνεια S με

$$S^* = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 4\}.$$

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε αρχικά την

$$\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2y, 2z, 2x) = (y, z, x).$$

Μια παραμέτρηση της S^* είναι η $S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, όπου $\Delta = \{(u, v) : 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4\}$. Έχουμε $S_u \times S_v = (-2u, -2v, 1)$ και $(S_u \times S_v) \cdot S(u, v) = -(u^2 + v^2) \leq 0$. Το $S_u \times S_v$ «δείχνει» στο εσωτερικό της S^* όταν σχεδιαστεί με αρχή πάνω στην S^* , άρα $\vec{n}(u, v) = -(S_u \times S_v) = (2u, 2v, -1)$.

Η ροή του $\text{rot } \vec{F}$ διαμέσου της S ισούται με

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} (v, u^2 + v^2, u) \cdot (2u, 2v, -1) du dv &= \iint_{\Delta} 2uv du dv + 2 \iint_{\Delta} v(u^2 + v^2) du dv - \iint_{\Delta} u du dv \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^3 \cos \phi \sin \phi dr d\phi + 2 \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^3 \sin \phi dr d\phi - \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \cos \phi dr d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(2\phi) \cdot \int_1^2 r^3 dr + 2 \int_0^{2\pi} \sin \phi \cdot \int_1^2 r^3 dr - \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \cdot \int_1^2 r^2 dr = 0, \end{aligned}$$

$$\text{αφού } \int_0^{2\pi} \sin(2\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0.$$

Υπολογίζουμε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{C_1 + (-C_2)} \vec{F} = \int_{C_1} \vec{F} - \int_{C_2} \vec{F},$$

όπου $C_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z = 1\}$ και $C_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z = 4\}$. Από το θεώρημα Green έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} &= \frac{1}{2} \int_{C_1} (z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz) = \frac{1}{2} \int_{C_1} (dx + x^2 dy) = \frac{1}{2} \iint_{\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}} 2x dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos \phi dr d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \cdot \int_0^1 r^2 dr = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \vec{F} &= \frac{1}{2} \int_{C_2} (z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz) = \frac{1}{2} \int_{C_2} (16 dx + x^2 dy) = \frac{1}{2} \iint_{\{(x,y): x^2+y^2 \leq 4\}} 2x dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos \phi dr d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \cdot \int_0^2 r^2 dr = 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\int_{C_1+(-C_2)} \vec{F} = 0.$ □

Άσκηση 15. Δίνεται διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = (3z^2 e^{z^3+y^2}, x^2, -y^2)$. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου C το θετικά προσανατολισμένο χείλος (σύνορο) του τμήματος της επιφάνειας του επιπέδου $z = y + 1$ που αποκόπτει ο ελλειπτικός κώνος $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$.

Υπόδειξη: Έχουμε $S^* : z = y + 1, z \geq \sqrt{x^2 + 2y^2}$. Μια παραμέτρηση της S^* είναι η $S(u, v) = (u, v, v + 1)$, όπου ζητάμε

$$\sqrt{u^2 + 2v^2} \leq v + 1 \iff u^2 + 2v^2 \leq (v + 1)^2 \iff u^2 + (v - 1)^2 \leq 2.$$

Θεωρούμε λοιπόν το $\Delta = \{(u, v) : u^2 + (v - 1)^2 \leq 2\}$ και την $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $S(u, v) = (u, v, v + 1)$. Από το θεώρημα Stokes,

$$\int_C \vec{F} = \iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv.$$

Υπολογίζουμε το $S_u \times S_v = (0, -1, 1)$ και παρατηρούμε ότι $(S_u \times S_v) \cdot S(u, v) = -v + v + 1 = 1 > 0$, δηλαδή το $S_u \times S_v$ «δείχνει» προς τα έξω αν σχεδιαστεί με αρχή το $S(u, v)$. Συνεπώς,

$$\vec{n}(u, v) = (0, -1, 1).$$

Έπεται ότι, για κάθε $(u, v) \in \Delta$,

$$\text{rot } \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) = (3(v + 1)^2 e^{(v+1)^3+v^2}, u^2, -v^2) \cdot (0, -1, 1) = -(u^2 + v^2).$$

Κάνοντας και την αλλαγή μεταβλητής $u = r \cos \phi, v = 1 + r \sin \phi$, όπου $\phi \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq \sqrt{2}$ και $J = r$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} &= - \iint_{\Delta} (u^2 + v^2) du dv = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [r^2 \cos^2 \phi + (1 + r \sin \phi)^2] r dr d\phi \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (r^2 + 2r \sin \phi + 1) r dr d\phi = -2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r^3 + r) dr - 2 \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr \\ &= -2\pi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = -2\pi \cdot 2 = -4\pi.\end{aligned}$$

□