

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$. Τι σημαίνει γεωμετρικά το πρόβλημα αυτό;

Λύση. Για την γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος παρατηρούμε καταρχάς ότι η συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ εκφράζει μια έλλειψη του $\mathbb{R}^2$ με κέντρο το $(0, 0)$. Παρατηρούμε επίσης ότι η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ είναι το τετράγωνο της απόστασης ενός σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων. Άρα τα ακρότατα της f υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ είναι στην ουσία τα σημεία της έλλειψης που απέχουν την μεγαλύτερη και την μικρότερη απόσταση από το $(0, 0)$. Με ένα σχήμα βλέπουμε ότι τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία τομής της έλλειψης με τους άξονες. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι όντως είναι αυτά τα σημεία με τους παρακάτω δύο τρόπους.

α' τρόπος: (Με Πολ/στές Lagrange) Θέτουμε $g(x, y) = 4x^2 + y^2$. Έχουμε $\nabla g(x, y) = (8x, 2y)$. Επειδή $\nabla g(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ έχουμε $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $4x^2 + y^2 = 16$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Lagrange τα πιθανά τοπικά ακρότατα της $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ θα ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 16 \end{cases}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε συνεπώς το παρακάτω σύστημα,

$$\begin{cases} 2x = 8\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\lambda x \\ y = \lambda y \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x(1 - 4\lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $\lambda = 1/4$. Αν $x = 0$ τότε $4x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$ και έχουμε τα σημεία $(0, 4)$, $(0, -4)$. Αν $x \neq 0$ τότε $\lambda = 1/4$ και από την δεύτερη εξίσωση έχουμε $y = 0$, οπότε από την τρίτη, $x = \pm 2$. Άρα παίρνουμε τα σημεία $(2, 0)$, $(-2, 0)$. Συνοψίζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι έχουμε εξής τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα $(0, 4)$, $(0, -4)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$. Επειδή η έλλειψη είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής, από γνωστό θεώρημα η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στην καμπύλη $4x^2 + y^2 = 16$. Τα σημεία (x, y) όπου η μέγιστη και ελάχιστη τιμή λαμβάνεται θα περιέχονται στα τέσσερα πιθανά ακρότατα που βρήκαμε. Επειδή $f(2, 0) = f(-2, 0) = 4 < 16 = f(0, -4) = f(0, 4)$ η f παρουσιάζει μέγιστο στα $(0, \pm 4)$ ενώ στα $(\pm 2, 0)$ ελάχιστο.

β' τρόπος: (Με απαλοιφή της μιας μεταβλητής) Λύνοντας την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ ως προς y^2 παίρνουμε ότι $y^2 = 16 - 4x^2$ με $x \in [-2, 2]$. Αντικαθιστώντας στον τύπο της f έχουμε την συνάρτηση $F : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = x^2 + (16 - 4x^2) = 16 - 3x^2$ που είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής. Είναι εύκολο να δούμε (ελέγξτε το) ότι η $F(x) = 16 - 3x^2$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή (αντίστοιχα μέγιστη τιμή) στο $x \in [-2, 2]$ αν και μόνο αν η $f(x, y) = x^2 + y^2$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή (αντίστοιχα μέγιστη τιμή) υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ στα σημεία $(x, \pm\sqrt{16 - x^2})$. Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των ακροτάτων της F που είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Τα πιθανά ακρότατα της F βρίσκονται στα άκρα του διαστήματος $[-2, 2]$ και στα εσωτερικά σημεία του $(-2, 2)$ όπου η παράγωγος F' μηδενίζεται και άρα είναι τα σημεία $x = \pm 2$ και $x = 0$. Επειδή $F(x) \geq 0 = F(\pm 2)$ έχουμε ότι στα $x = \pm 2$ η F εμφανίζει ελάχιστο. Επίσης, στο $x = 0$ η F λαμβάνει μέγιστη τιμή (αύξουσα αριστερά και φθίνουσα δεξιά του 0). Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στα $(0, \pm 4)$ ενώ στα $(\pm 2, 0)$ ελάχιστο.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι μεταξύ όλων των τριγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε δεδομένο κύκλο το ισόπλευρο είναι το τρίγωνο με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Λύση. Έστω R η ακτίνα του κύκλου και $\triangle AB\Gamma$ ένα εγγεγραμμένο τρίγωνο. Αν με x, y, z συμβολίσουμε τις επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ τότε το εμβαδόν του $\triangle AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}R^2 (\sin x + \sin y + \sin z)$$

όπου $x + y + z = 2\pi$ και $0 < x, y, z < \pi$. Επομένως ψάχνουμε να βρούμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z)$ υπό τις συνθήκες $x + y + z = 2\pi$ και $0 < x, y, z < \pi$. Λύνοντας την συνθήκη $x + y + z = \pi$ ως προς z έχουμε $z = 2\pi - x - y$. Άρα η f παίρνει την μορφή

$$F(x, y) = \frac{1}{2}R^2 (\sin x + \sin y + \sin(2\pi - x - y)) = \frac{1}{2}R^2 (\sin x + \sin y - \sin(x + y))$$

όπου $0 < x < \pi$ και $0 < y < \pi$. Το $R = (0, \pi) \times (0, \pi)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, η F είναι C^2 και συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο της δεύτερης παραγωγής.

Βρίσκουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της F . Θεωρούμε το σύστημα $F_x(x, y) = \cos x - \cos(x + y) = 0$ και $F_y(x, y) = \cos y - \cos(x + y) = 0$. Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε $\cos x = \cos y$ οπότε (αφού $0 < x, y < \pi$) $x = y$. Άρα $\cos x = \cos 2x \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, οπότε $\cos x = 1$ ή $\cos x = -1/2$. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $x = 0$ (απορρίπτεται) και από την δεύτερη $x = 2\pi/3 = 120^\circ$ (δεκτή). Άρα το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

Υπολογίζοντας τις f_{xx} και $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ στο (x_0, y_0) βλέπουμε ότι $f_{xx}(x_0, y_0) = -\sqrt{3} < 0$ και $\Delta(x_0, y_0) = 9/4 > 0$ και άρα το (x_0, y_0) είναι τοπικό μέγιστο. Για να δείξουμε ότι είναι σημείο ολικού μεγίστου θεωρούμε την F ορισμένη στο κλειστό $\bar{R} = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Επειδή η F μηδενίζεται στο σύνορο του $\bar{R}$ ενώ στο εσωτερικό του αérνει θετικές τιμές έπεται ότι τη μέγιστη τιμή η F την λαμβάνει στο εσωτερικό του $[0, \pi] \times [0, \pi]$. Άρα το σημείο (x_0, y_0) είναι στην ουσία το ολικό μέγιστο της F . Επειδή στο σημείο αυτό ισχύει $x_0 = y_0 = z_0 = 120^\circ$ το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2e^y + x^2 + y - 1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα σε μια περιοχή του σημείου $(0, 1)$ μια μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$. Βρείτε τον τύπο της $f'(x)$ και δείξτε ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο $x = 0$.

Λύση. Έστω $F(x, y) = x^2e^y + x^2 + y - 1$. Έχουμε $F(0, 1) = 0$, $F_x(x, y) = 2xe^y + 2x = 2x(e^y + 1)$ και $F_y(x, y) = x^2e^y + 1$. Συνεπώς η F είναι C^1 και $F_y(0, 1) = 1 \neq 0$. Από το Θεώρημα των Πεπλεγμένων συναρτήσεων η εξίσωση $F(x, y) = 0$ ορίζει πεπλεγμένα σε μια περιοχή του σημείου $(0, 1)$ μια μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$. Δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα I και J με κέντρα τα σημεία $x_0 = 0$ και $y_0 = 1$ και μια C^1 συνάρτηση $f : I \rightarrow J$ με $f(0) = 1$ και τέτοια ώστε αν $(x, y) \in I \times J$ τότε

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Επίσης

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}\bigg|_{y=f(x)} = -\frac{2x(e^y + 1)}{x^2e^y + 1}\bigg|_{y=f(x)}$$

για κάθε $x \in I$. Συνεπώς, $f'(0) = 0$. Άρα, αν $x \in I$ και $x < 0$ (αντ. $x > 0$) τότε $f'(x) > 0$ (αντ. $f'(x) < 0$) και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα αριστερά του 0 και γνησίως φθίνουσα δεξιά του 0. Άρα η f έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3z^2 - z^3yx = 0$ μπορεί να επιλυθεί, με μοναδικό τρόπο ως προς z , σε μία περιοχή του σημείου $(1, 1, 1)$ αλλά όχι σε περιοχή του σημείου $(0, 0, 0)$. Στη συνέχεια υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $z_x(1, 1)$ και $z_y(1, 1)$ της $z = z(x, y)$.

Λύση. Θέτουμε

$$F(x, y, z) = x^3 z^2 - z^3 yx$$

και έχουμε ότι

$$F_z(1, 1, 1) = -1 \neq 0$$

Επομένως η εξίσωση

$$x^3 z^2 - z^3 yx = 0$$

μπορεί να επιλυθεί, με μοναδικό τρόπο ως προς z , σε μία περιοχή του σημείου $(1, 1, 1)$.

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι

$$F_z(0, 0, 0) = 0$$

και άρα δεν ικανοποιείται η υπόθεση του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης. Επιπλέον βλέπουμε ότι η εξίσωση μας για $x = 0$ ικανοποιείται για κάθε z και συνεπώς δεν μπορεί να λυθεί ως προς z με μοναδικό τρόπο σε καμία περιοχή του σημείου $(0, 0, 0)$.

Τέλος, βρίσκουμε ότι

$$z_x(1, 1) = -\frac{F_x(1, 1, 1)}{F_z(1, 1, 1)} = 2 \text{ και } z_y(1, 1) = -\frac{F_y(1, 1, 1)}{F_z(1, 1, 1)} = -1.$$

Άσκηση 5. Να δείξετε ότι η επιφάνεια $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ μπορεί να αναπαρασταθεί από το γράφημα μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης $z = z(x, y)$ γύρω από το σημείο $(1, 0, -1)$. Στη συνέχεια να βρείτε τις μερικές παραγώγους της $z = z(x, y)$ στο σημείο $(1, 0)$.

Λύση. Θέτουμε

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

και παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, -1) = 3 \neq 0.$$

Συνεπώς από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $z = z(x, y)$ τέτοια ώστε $F(x, y, z(x, y)) = 0$ για κάθε (x, y) σε μία κατάλληλη περιοχή του σημείου $(1, 0)$. Με άλλα λόγια η επιφάνεια $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ είναι το γράφημα της f γύρω από το σημείο $(1, 0, -1)$.

Σύμφωνα και πάλι με το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης έχουμε ότι

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z(x, y))}{F_z(x, y, z(x, y))}$$

και

$$z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z(x, y))}{F_z(x, y, z(x, y))}$$

Επομένως

$$z_x(1, 0) = 1 = z_y(1, 0).$$

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $y = f(x)$, ορισμένη γύρω από το $x_0 = 1$ με $f(1) = 1$ και τέτοια ώστε $x^y + y^x = 2$. Επίσης να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(1)$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x, y) = x^y + y^x - 2 = e^{y \ln x} + e^{x \ln y} - 2 = 0$. Έχουμε $F(1, 1) = 0$ και

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x + \frac{x}{y} y^x = x^y \ln x + x y^{x-1},$$

οπότε $F \in C^1$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 1 \neq 0$.

Από το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων υπάρχει μια μοναδική C^1 συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη σε μία ανοικτή περιοχή $X = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του $x_0 = 1$ ώστε

$$x^{f(x)} + [f(x)]^x = 2$$

για κάθε $x \in X$. Επιπλέον $F_x(x, y) = \frac{y}{x}x^y + y^x \ln x$, και άρα

$$f'(1) = -\frac{F_x(1, 1)}{F_y(1, 1)} = -1$$

Άσκηση 7. Δείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I ανοικτή περιοχή του 0 τέτοια ώστε

$$xe^{f(x)} + f(x)e^x = \cos(xf(x)).$$

Επίσης να υπολογίσετε την $f'(0)$.

Λύση. Θετώντας $y = f(x)$ παίρνουμε την εξίσωση $xe^y + ye^x = \cos(xy)$. Άρα αν $F(x, y) = xe^y + ye^x - \cos(xy)$ έχουμε την εξίσωση $F(x, y) = 0$. Έχουμε $F(0, y) = y - 1$ οπότε $F(0, 1) = 0$. Επίσης $F_x(x, y) = e^y + ye^x + y \cos(xy) \Rightarrow F_x(0, 1) = e + 1$, $F_y(x, y) = xe^y + e^x + x \cos(xy) \Rightarrow F_y(0, 1) = 1 \neq 0$. Άρα η F είναι C^1 , $F(0, 1) = 0$ και $F_y(0, 1) \neq 0$. Από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης συνάρτησης η F λύνεται ως προς y συναρτήσει του x σε μια περιοχή του $(0, 1)$, δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα I και J με κέντρα τα $x_0 = 0$ και $y_0 = 1$ και μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \rightarrow J$ τέτοια ώστε για κάθε $(x, y) \in I \times J$, $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$. Επιπλέον $f'(0) = -\frac{F_x(0, 1)}{F_y(0, 1)} = -1 - e$.

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $z = f(x, y)$, ορισμένη σε περιοχή U του $(1, 1)$ έτσι ώστε $f(1, 1) = 1$ και $x^z + z^y + y^x = 3$, ($x \in U$) Να υπολογίσετε επίσης τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ ως προς τα οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\mathbf{u}}(1, 1)$ μηδενίζεται.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x, y, z) = x^y + z^y + y^x - 3 = 0$. Παρατηρούμε ότι $F(1, 1, 1) = 0$ καθώς και ότι F είναι C^1 .

$$F(x, y, z) = e^{z \ln x} + e^{y \ln z} + e^{x \ln y} - 3$$

$$F_z(x, y, z) = \ln x e^{z \ln x} + \frac{y}{z} e^{y \ln z}, \quad F_x(x, y, z) = \frac{z}{x} e^{z \ln x} + \ln y e^{x \ln y}, \quad F_y(x, y, z) = \ln z e^{y \ln z} + \frac{x}{y} e^{x \ln y}.$$

Αφού $F_z(1, 1, 1) = 1 \neq 0$ προκύπτει από Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης ότι υπάρχει C^1 συνάρτηση $z = f(x, y)$ ορισμένη σε μία ανοικτή περιοχή U του $(1, 1)$ ώστε να ισχύει

$$x^{f(x, y)} + [f(x, y)]^y + y^x = 3, \quad \forall (x, y) \in A$$

με $f(1, 1) = 1$ και

$$f_x(1, 1) = -\frac{F_x(1, 1, 1)}{F_z(1, 1, 1)} = -1, \quad f_y(1, 1) = -\frac{F_y(1, 1, 1)}{F_z(1, 1, 1)} = -1.$$

Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $f_{\mathbf{u}}(1, 1) = 0$. Τότε

$$f_{\mathbf{u}}(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow (-1, -1) \cdot (u_1, u_2) = 0 \Leftrightarrow u_1 = -u_2$$

Αφού $\mathbf{u}$ μοναδιαίο άρα

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1, \Rightarrow u_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } u_2 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα τα διανύσματα αυτά είναι τα $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Άσκηση 9. Να δείξετε ότι υπάρχει συνάρτηση $z = f(x, y)$ σε ανοικτή περιοχή U του $(-1, 1)$ με $f(-1, 1) = 1$ τέτοια ώστε

$$z^5 + xyz^2 + 2xz + x^2 + 1 = 0, \quad \forall (x, y) \in U.$$

και να βρείτε την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f στο $(-1, 1)$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x, y, z) = z^5 + xyz^2 + 2xz + x^2 + 1$. Παρατηρούμε ότι $F(-1, 1, 1) = 0$ καθώς και ότι $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

$$F_x(x, y, z) = yz^2 + 2z + 2x, \quad F_y(x, y, z) = xz^2, \quad F_z(x, y, z) = 5z^4 + 2xyz + 2x$$

Αφού $F(-1, 1, 1) = 1 \neq 0$ από Θεώρημα Πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχει C^1 συνάρτηση $z = f(x, y)$ ορισμένη σε μία ανοικτή περιοχή U του $(-1, 1)$ ώστε να ισχύει

$$[f(x, y)]^5 + xy[f(x, y)]^2 + 2xf(x, y) + x^2 + 1 = 0, \quad \forall (x, y) \in U$$

με $f(-1, 1) = 1$ και

$$f_x(-1, 1) = -\frac{F_x(-1, 1, 1)}{F_z(-1, 1, 1)} = -1, \quad f_y(-1, 1) = -\frac{F_y(-1, 1, 1)}{F_z(-1, 1, 1)} = 1 \quad \nabla f(-1, 1) = (-1, 1).$$

Η κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της $f(x, y)$ στο $(-1, 1)$ δίνεται από

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(-1, 1)}{\|\nabla f(-1, 1)\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Άσκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y, z) = z^5 + z - x^2 - y^2$.

(α) Δείξτε ότι η F είναι κλάσης C^2 και ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}$ (επίσης κλάσης C^2) σε μια περιοχή U του σημείου $(0, 0)$ με $z(0, 0) = 0$.

(β) Υπολογίστε τις πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της $z = z(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$. Δείξτε ότι η $z = z(x, y)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0, 0)$.

(γ) Δώστε το πολυώνυμο Taylor της $z = z(x, y)$ δεύτερης τάξης στο $(0, 0)$.

(δ) Βρείτε το $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{z(x, y)}{x^2 + y^2}$.

Λύση. (α) Έχουμε $F_x(x, y, z) = -2x$, $F_y(x, y, z) = -2y$, $F_z(x, y, z) = 5z^4 + 1$, $F_{xx}(x, y, z) = -2$, $F_{yy}(x, y, z) = -2$, $F_{zz}(x, y, z) = 20z^3$, $F_{xy} = F_{yx} = 0$, $F_{yz} = F_{zy} = 0$ και $F_{zx} = F_{xz} = 0$. Έρα η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης, δηλαδή είναι C^2 . Επειδή $F_z(x, y, z) = 5z^4 + 1 \neq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ από το Θεώρημα των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων έχουμε ότι σε κάθε (x_0, y_0, z_0) με $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ υπάρχει περιοχή του (x_0, y_0, z_0) όπου η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ λύνεται ως προς $z = z(x, y)$. Επειδή $F(0, 0, 0) = 0$ το ζητούμενο έπεται.

(β) Είναι

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y)}{F_z(x, y)} = -\frac{2x}{5z^4(x, y) + 1}, \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y)}{F_z(x, y)} = -\frac{2y}{5z^4(x, y) + 1}$$

$$z_{xx}(x, y) = \frac{2(5z^4(x, y) + 1) - 40xz^3 z_x(x, y)}{(5z^4(x, y) + 1)^2}$$

$$z_{yy}(x, y) = \frac{2(5z^4(x, y) + 1) - 40yz^3 z_y(x, y)}{(5z^4(x, y) + 1)^2}$$

$$z_{xy}(x, y) = \frac{-40xz^3z_y(x, y)}{(5z^4(x, y) + 1)^2}$$

Άρα $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$, $z_{xx}(0, 0) = z_{yy}(0, 0) = 2$ και $z_{xy}(0, 0) = 0$. Άρα $z_{xx}(0, 0) > 0$ και $\Delta(0, 0) = z_{xx}(0, 0)z_{yy}(0, 0) - z_{xy}^2(0, 0) = 4 > 0$ και συνεπώς η $z = z(x, y)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0, 0)$.

(γ) Όπως γνωρίζουμε το πολυώνυμο Taylor της $z = z(x, y)$ δεύτερης τάξης στο σημείο $(0, 0)$ δίνεται από τον τύπο

$$T(x, y) = z(0, 0) + z_x(0, 0)x + z_y(0, 0)y + \frac{1}{2} [z_{xx}(0, 0)x^2 + 2z_{xy}(0, 0)xy + z_{yy}(0, 0)y^2]$$

και άρα αντικαθιστώντας τις τιμές των μερικών παραγώγων παίρνουμε ότι $T(x, y) = x^2 + y^2$.

(δ) Από Θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$\lim_{x, y \rightarrow (0, 0)} \frac{z(x, y) - T(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

Απο το (iii) έχουμε

$$\frac{z(x, y) - T(x, y)}{x^2 + y^2} = \frac{z(x, y) - (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{z(x, y)}{x^2 + y^2} - 1$$

και συνεπώς

$$\lim_{x, y \rightarrow (0, 0)} \frac{z(x, y)}{x^2 + y^2} = 1.$$