

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9

Άσκηση 1. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$. Τι σημαίνει γεωμετρικά το πρόβλημα αυτό?

Άσκηση 2. Δείξτε ότι μεταξύ όλων των τριγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε δεδομένο κύκλο το ισόπλευρο είναι το τρίγωνο με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2e^y + x^2 + y - 1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα σε μια περιοχή του σημείου $(0, 1)$ μια μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$. Βρείτε τον τύπο της $f'(x)$ και δείξτε ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο $x = 0$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3z^2 - z^3yx = 0$ μπορεί να επιλυθεί, με μοναδικό τρόπο ως προς z , σε μία περιοχή του σημείου $(1, 1, 1)$ αλλά όχι σε περιοχή του σημείου $(0, 0, 0)$. Στη συνέχεια υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $z_x(1, 1)$ και $z_y(1, 1)$ της $z = z(x, y)$.

Άσκηση 5. Να δείξετε ότι η επιφάνεια $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ μπορεί να αναπαρασταθεί από το γράφημα μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης $z = z(x, y)$ γύρω από το σημείο $(1, 0, -1)$. Στη συνέχεια να βρείτε τις μερικές παραγώγους της $z = z(x, y)$ στο σημείο $(1, 0)$.

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $y = f(x)$, ορισμένη γύρω από το $x_0 = 1$ με $f(1) = 1$ και τέτοια ώστε $x^y + y^x = 2$. Επίσης να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(1)$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I ανοικτή περιοχή του 0 τέτοια ώστε

$$xe^{f(x)} + f(x)e^x = \cos(xf(x)).$$

Επίσης να υπολογίσετε την $f'(0)$.

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $z = f(x, y)$, ορισμένη σε περιοχή U του $(1, 1)$ έτσι ώστε $f(1, 1) = 1$ και $x^z + z^y + y^x = 3$, $(x, y) \in U$. Να υπολογίσετε επίσης τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ ως προς τα οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\mathbf{u}}(1, 1)$ μηδενίζεται.

Άσκηση 9. Να δείξετε ότι υπάρχει συνάρτηση $z = f(x, y)$ σε ανοικτή περιοχή U του $(-1, 1)$ με $f(-1, 1) = 1$ τέτοια ώστε

$$z^5 + xyz^2 + 2xz + x^2 + 1 = 0, \quad \forall (x, y) \in U.$$

και να βρείτε την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f στο $(-1, 1)$.

Άσκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y, z) = z^5 + z - x^2 - y^2$.

(α) Δείξτε ότι η F είναι κλάσης C^2 και ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}$ (επίσης κλάσης C^2) σε μια περιοχή U του σημείου $(0, 0)$ με $z(0, 0) = 0$.

(β) Υπολογίστε τις πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της $z = z(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$. Δείξτε ότι η $z = z(x, y)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0, 0)$.

(γ) Δώστε το πολυώνυμο Taylor της $z = z(x, y)$ δεύτερης τάξης στο $(0, 0)$.

(δ) Βρείτε το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{z(x,y)}{x^2 + y^2}$.