

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2024-25)

Άσκηση 1. Έστω $\vec{F} = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$P = yz^2 \cos(xy) + 2xy, \quad Q = xz^2 \cos(xy) + x^2 + z, \quad R = 2z \sin(xy) + y + 2z.$$

(α) Να δείξετε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

(β) Να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$.

(γ) Να υπολογίσετε το $\int_{\vec{K}\Lambda} \vec{F}$, όπου $K(1, 1, 0)$ και $\Lambda(1, 2, 1)$.

Άσκηση 2. Να δείξετε ότι το $\vec{F} = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy + z)$ είναι συντηρητικό και να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού.

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε τα:

(α) $J_1 = \int_{\gamma} zy^2 dx + x^2 z^2 dy + xz dz$, όπου γ η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 6)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(β) $J_2 = \int_{\gamma} (2x + e^y + y)dx + (xe^y + 3x - y^3)dy$, όπου $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(γ) $J_3 = \int_{\gamma} (P dx + Q dy)$, όπου $P = 2x^4 + y^2 + e^x$, $Q = 3x - y^3 - e^{y^2}$, και $\gamma(t) = (-1 + \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε το $J = \int_{\gamma} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right)$, όπου γ^* το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του τριγώνου ABC , όπου $A(0, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(1, -2)$.

Άσκηση 5. Έστω $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς, κλάσης C^1 στο Ω , με $u(x, y) = 1$ και $v(x, y) = y$ για κάθε $(x, y) \in \partial\Omega$. Θέτουμε $\vec{F} = (v, u)$ και $\vec{G} = (u_x - u_y, v_x - v_y)$. Να υπολογίσετε το

$$\iint_{\Omega} \vec{F}(x, y) \cdot \vec{G}(x, y) dx dy.$$

Άσκηση 6. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό φραγμένο χωρίο με σύνορο $\partial\Omega = \gamma$, όπου γ θετικά προσανατολισμένη απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη και $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις κλάσης C^2 , όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό με $\bar{\Omega} \subseteq U$. Αποδείξτε τον τύπο του Green

$$\iint_{\Omega} f \Delta g + \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g = \int_{\partial\Omega} (-f g_y dx + f g_x dy),$$

όπου $\Delta g = g_{xx} + g_{yy}$ η Λαπλασιανή της g .

Άσκηση 7. Να υπολογίσετε το $J = \int_{\gamma} x e^{-y^2} dx + \left(-x^2 y e^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy$, όπου γ ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $x^2 + y^2 = 1$.

Άσκηση 8. Έστω $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ και $P, Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$P(x, y) = y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad Q(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Να δείξετε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό στο Ω και να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$.

Άσκηση 9. Να υπολογίσετε το $J = \int_{\gamma} \left(-\frac{y}{9x^2 + 4y^2} dx + \frac{x}{9x^2 + 4y^2} dy \right)$, όπου γ ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $x^2 + y^2 = 1$.

Άσκηση 10. Να υπολογίσετε το $\int_{\gamma} (P dx + Q dy)$, όπου

$$P = -3x^2 \sin(x^3)y - y^3, \quad Q = \cos(x^3) + e^y,$$

και γ η τεθλασμένη γραμμή ABC , όπου $A(0, -1)$, $B(1, 0)$ και $C(0, 1)$.

Άσκηση 11. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου με σύνορο την καμπύλη

$$\gamma : \quad x = x(t) = 2 \cos t - \cos(2t), \quad y = y(t) = 2 \sin t - \sin(2t), \quad t \in [0, 2\pi].$$