

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Να μελετηθεί ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4x^3 - 4y, f_y(x, y) = -4x + 4y, \\ f_{xx}(x, y) &= 12x^2, f_{xy}(x, y) = -4, f_{yy}(x, y) = 4 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2$. Επίσης,

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 48x^2 - 16 \quad (1)$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $y = x$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x + 1 \text{ ή } x = -1$$

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. Από την (1) παίρνουμε $\Delta(0, 0) < 0$ και άρα το σημείο $(0, 0)$ είναι σαγματικό. Επίσης, $\Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) > 0$ οπότε τα σημεία $(1, 1)$ και $(-1, -1)$ είναι τοπικά ελάχιστα.

Άσκηση 2. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + 2x^2y + y^2 + \frac{2}{3}y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 + 4xy$, $f_y(x, y) = 2x^2 + 2y + 2y^2$. Επίσης $f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4y$, $f_{yy}(x, y) = 2 + 4y$, $f_{xy}(x, y) = 4y$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$. Έχουμε

$$f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } y = -x^2$$

Αν $x = 0$ τότε $f_y(x, y) = y + y^2 = 0 \Leftrightarrow y(1 + y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -1$.

Αν $y = -x^2$ τότε $f_y(x, y) = 2x^2 - 2x^2 + 4x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0, 0)$ και $(0, -1)$.

Επειδή $\Delta(0, -1) = (-4)^2 + 12 > 0$ και $f_{xx}(0, -1) - 4 < 0$ το $(0, -1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Για το $(0, 0)$ έχουμε ότι $\Delta(0, 0) = 0$. Για να δούμε αν είναι τοπικό ακρότατο παρατηρούμε ότι

$$f(x, y) = (x^2 + y)^2 + \frac{2}{3}y^3$$

Άρα για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ στην παραβολή $y = -x^2$ έχουμε $f(x, y) < 0$ ενώ για κάθε (x, y) στην ευθεία $y = 0$ έχουμε $f(x, y) = x^4 > 0$. Οπότε το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Άσκηση 3. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 8x^3 - 12xy + y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 24x^2 - 12y$, $f_y(x, y) = -12x + 3y^2$. Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 24x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ -4x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ -4x + (2x^2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ 4x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{cases}$$

και άρα παίρνουμε δύο κρίσιμα σημεία τα $(0, 0)$ και $(1, 2)$. Επειδή $f_{xx}(x, y) = 48x$, $f_{yy}(x, y) = 6y$, $f_{xy}(x, y) = -12$ και $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$, για το $(0, 0)$ έχουμε $\Delta(0, 0) < 0$ οπότε το $(0, 0)$ είναι σαγματικό. Αντίστοιχα $\Delta(1, 2) > 0$ και $f_{xx}(1, 2) > 0$ και άρα η f στο $(1, 2)$ έχει τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4x^2y + 4y^2 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 8xy, \quad f_y(x, y) = -4x^2 + 8y - 4y^3$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 4x^3 - 8xy = 0 \\ -4x^2 + 8y - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει

$$4x^3 - 8xy = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } y = \frac{x^2}{2}$$

1) Αν $x = 0$ τότε από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$-4x^2 + 8y - 4y^3 = 8y - 4y^3 = 0 \Leftrightarrow 4y(2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = \pm\sqrt{2}$$

οπότε παίρνουμε τα σημεία $(0, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$ και $(0, \sqrt{2})$.

2) Αντίστοιχα αν $y = \frac{x^2}{2}$ η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$-4x^2 + 8y - 4y^3 = -4y^3 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

οπότε έχουμε πάλι το σημείο $(0, 0)$. Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα εξής:

$$(0, 0), \quad (0, -\sqrt{2}) \text{ και } (0, \sqrt{2})$$

Προχωρούμε στην εύρεση των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης. Έχουμε

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 8y, \quad f_{yy}(x, y) = 8 - 12y^2, \quad f_{xy}(x, y) = -8x$$

και συνεπώς

$$\Delta(x, y) = (12x^2 - 8y)(8 - 12y^2) - 64x^2$$

οπότε

$$\Delta(0, y) = -8y(8 - 12y^2)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

• Για το σημείο $(0, 0)$ έχουμε $\Delta(0, 0) = 0$ και άρα το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου δεν αποφαινεται. Παρατηρούμε όμως ότι

$$f(x, y) = (x^4 - 4x^2y + 4y^2) - y^4 = (x^2 - 2y)^2 - y^4 = -y^4 < 0$$

όταν $y = x^2/2$ ενώ

$$f(x, 0) = x^4 > 0$$

Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

• Για το σημείο $(0, \sqrt{2})$ έχουμε

$$\Delta(0, \sqrt{2}) = -8\sqrt{2}(8 - 24) > 0$$

Επιπλέον $f_{xx}(0, \sqrt{2}) = -8\sqrt{2} < 0$. Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου έχουμε ότι στο $(0, \sqrt{2})$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

• Για το σημείο $(0, -\sqrt{2})$ έχουμε

$$\Delta(0, -\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}(8 - 24) < 0$$

Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου έχουμε ότι το $(0, -\sqrt{2})$ είναι σαγματικό σημείο της f .

Άρα η f έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο το $(0, \sqrt{2})$, που ειδικότερα είναι τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 5. Βρείτε με διάφορους τρόπους το σημείο του επιπέδου $x + y + z = 3$ που είναι πλησιέστερο στο $(0, 0, 0)$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι το σημείο του επιπέδου $x + y + z = 3$ που είναι πλησιέστερο στο $(0, 0, 0)$ είναι το σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ όπου η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο υπό την συνθήκη $g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$. Θα δώσουμε τρεις τρόπους εύρεσης αυτού του σημείου.

α' τρόπος (Με πολλαπλασιαστές Lagrange): Έχουμε

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0) \quad (2)$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και άρα τα πιθανά τοπικά ακρότατα της $f(x, y, z)$ υπό την συνθήκη $g(x, y, z) = 0$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2y = 2z = \lambda \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Οπότε $x = y = z = \lambda/2$ και αντικαθιστώντας στην $x + y + z = 3$ παίρνουμε $\lambda = 2$. Άρα το μοναδικό πιθανό τοπικό ακρότατο της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 3$ είναι το σημείο $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$ και άρα αυτό είναι το ζητούμενο σημείο.

β' τρόπος (Με επίλυση της συνθήκης ως προς μια μεταβλητή): Λύνοντας την εξίσωση $x + y + z = 3$ ως προς z έχουμε $z = 3 - x - y$ και αντικαθιστώντας στην f παίρνουμε την συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(x, y, 3 - x - y) \\ &= x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 6y \end{aligned}$$

που ορίζεται σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία της F λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} F_x(x, y, z) = 0 \\ F_y(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 6 = 0 \\ 4y + 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η μοναδική λύση είναι το σημείο $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Έχουμε $F_{xx}(x, y) = F_{yy}(x, y) = 4$ και $F_{xy}(x, y) = 2$. Άρα $\Delta(1, 1) = 4 \cdot 4 - 2^2 = 12 > 0$ και αφού $F_{xx}(1, 1) = 4 > 0$ το σημείο $(1, 1)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Άρα το $(x_0, y_0, 3 - x_0 - y_0) = (1, 1, 1)$ είναι το ζητούμενο σημείο.

γ' τρόπος Από ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$|x + y + z| = |1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z| = |(1, 1, 1) \cdot (x, y, z)| \leq \|(1, 1, 1)\| \cdot \|(x, y, z)\| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Οπότε

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3}$$

Συνεπώς για όλα τα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ με $x + y + z = 3$ έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \Leftrightarrow f(x, y, z) \geq f(1, 1, 1)$$

Άρα το $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 3$.

Άσκηση 6. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$. Τι σημαίνει γεωμετρικά το πρόβλημα αυτό?

Λύση. Για την γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος παρατηρούμε καταρχάς ότι η συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ εκφράζει μια έλλειψη του $\mathbb{R}^2$ με κέντρο το $(0, 0)$. Παρατηρούμε επίσης ότι η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ είναι το τετράγωνο της απόστασης ενός σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων. Άρα τα ακρότατα της f υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ είναι στην ουσία τα σημεία της έλλειψης που απέχουν την μεγαλύτερη και την μικρότερη απόσταση από το $(0, 0)$. Με ένα σχήμα βλέπουμε ότι τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία τομής της έλλειψης με τους άξονες. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι όντως είναι αυτά τα σημεία με τους παρακάτω δύο τρόπους.

α' τρόπος: (Με Πολ/στές Lagrange) Θέτουμε $g(x, y) = 4x^2 + y^2$. Έχουμε $\nabla g(x, y) = (8x, 2y)$. Επειδή $\nabla g(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ έχουμε $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $4x^2 + y^2 = 16$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Lagrange τα πιθανά τοπικά ακρότατα της $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ θα ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 16 \end{cases}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε συνεπώς το παρακάτω σύστημα,

$$\begin{cases} 2x = 8\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\lambda x \\ y = \lambda y \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x(1 - 4\lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $\lambda = 1/4$. Αν $x = 0$ τότε $4x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$ και έχουμε τα σημεία $(0, 4)$, $(0, -4)$. Αν $x \neq 0$ τότε $\lambda = 1/4$ και από την δεύτερη εξίσωση έχουμε $y = 0$, οπότε από την τρίτη, $x = \pm 2$. Άρα παίρνουμε τα σημεία $(2, 0)$, $(-2, 0)$. Συνοψίζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι έχουμε εξής τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα $(0, 4)$, $(0, -4)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$. Επειδή η έλλειψη είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής, από γνωστό θεώρημα η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στην καμπύλη $4x^2 + y^2 = 16$. Τα σημεία (x, y) όπου η μέγιστη και ελάχιστη τιμή λαμβάνεται θα περιέχονται στα τέσσερα πιθανά ακρότατα που βρήκαμε. Επειδή $f(2, 0) = f(-2, 0) = 4 < 16 = f(0, -4) = f(0, 4)$ η f παρουσιάζει μέγιστο στα $(0, \pm 4)$ ενώ στα $(\pm 2, 0)$ ελάχιστο.

β' τρόπος: (Με απαλοιφή της μιας μεταβλητής) Λύνοντας την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ ως προς y^2 παίρνουμε ότι $y^2 = 16 - 4x^2$ με $x \in [-2, 2]$. Αντικαθιστώντας στον τύπο της f έχουμε την συνάρτηση $F : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = x^2 + (16 - 4x^2) = 16 - 3x^2$ που είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής. Είναι εύκολο να δούμε (ελέγξτε το) ότι η $F(x) = 16 - 3x^2$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή (αντίστοιχα μέγιστη τιμή) στο $x \in [-2, 2]$ αν και μόνο αν η $f(x, y) = x^2 + y^2$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή (αντίστοιχα μέγιστη τιμή) υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$ στα σημεία $(x, \pm\sqrt{16 - x^2})$. Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των ακροτάτων της F που είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Τα πιθανά ακρότατα της F βρίσκονται στα άκρα του διαστήματος $[-2, 2]$ και στα εσωτερικά σημεία του $(-2, 2)$ όπου η παράγωγος F' μηδενίζεται και άρα είναι τα σημεία $x = \pm 2$ και $x = 0$. Επειδή $F(x) \geq 0 = F(\pm 2)$ έχουμε ότι στα $x = \pm 2$ η F εμφανίζει ελάχιστο. Επίσης, στο $x = 0$ η F λαμβάνει μέγιστη τιμή (αύξουσα αριστερά και φθίνουσα δεξιά του 0). Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στα $(0, \pm 4)$ ενώ στα $(\pm 2, 0)$ ελάχιστο.

Άσκηση 7. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ στο ελλειψοειδές $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1\}$.

Λύση. Μελετούμε την f ως προς τα τοπικά ακρότατα ξεχωριστά στο εσωτερικό και στο σύνορο του K . Έχουμε $f_x(x, y, z) = 2x$, $f_y(x, y, z) = 2y$ και $f_z(x, y, z) = 2z$. Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο εσωτερικό του K είναι το $(0, 0, 0)$ και στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο αφού $f(0, 0, 0) = 0$ και $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Μελετούμε τώρα την f στο σύνορο του K , δηλαδή στο σύνολο

$$\partial K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1\}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολ/στων Lagrange. Θέτουμε $g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 1$ και επειδή $\nabla g(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ για $(x, y, z) \in \partial K$, τα πιθανά σημεία ακροτάτων θα ικανοποιούν το σύστημα

$$\nabla h(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \text{ και } g(x, y, z) = 0.$$

Συνεπώς πρέπει

$$2x = 4\lambda x, \quad 2y = 2\lambda y, \quad 2z = 6\lambda z \quad \text{και} \quad 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$$

Με αυτά τα δεδομένα βρίσκουμε ότι είτε $\lambda = 1/2$ και $(x, y, z) = (\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0)$, είτε $\lambda = 1$ και $(x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$ ή $\lambda = 1/3$ και $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1/\sqrt{3})$. Με σύγκριση των τιμών της f στα σημεία αυτά βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή στο ∂K λαμβάνεται στα σημεία $(0, \pm 1, 0)$ και η ελάχιστη στα $((0, 0, \pm 1/\sqrt{3}))$.

Άρα η f στο K λαμβάνει ολικό ελάχιστο στο $(0, 0, 0)$ και ολικό μέγιστο στα σημεία $(0, \pm 1, 0)$.

Άσκηση 8. (Υπαρξη ιδιοδιανύσματος συμμετρικού πίνακα) Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας και $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή, δηλαδή

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

(α) Δείξτε ότι $\nabla Q(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$\nabla Q(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

Έστω $k \in \{1, \dots, n\}$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j \neq k} a_{kj} x_k x_j + \sum_{i \neq k} a_{ik} x_i x_k + a_{kk} x_k^2 \right) = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j$$

οπότε και έχουμε την ισότητα $\nabla Q(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(β) Έστω $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^n$. Το S είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και άρα η $Q|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ ως συνεχής, θα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Ισοδύναμα η Q λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή υπό τον περιορισμό $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Έστω $\mathbf{x}_0 \in S$ ($\|\mathbf{x}_0\| = 1$) σημείο στην S στο οποίο η $Q|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ λαμβάνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. Σύμφωνα με τη μέθοδο των πολ/στων Lagrange θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\nabla Q(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0) = 2\lambda \mathbf{x}_0.$$

Άρα χρησιμοποιώντας το (α) έχουμε

$$2A\mathbf{x}_0 = 2\lambda \mathbf{x}_0 \Rightarrow A\mathbf{x}_0 = \lambda \mathbf{x}_0$$

και το συμπέρασμα έπεται.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι μεταξύ όλων των τριγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε δεδομένο κύκλο το ισόπλευρο είναι το τρίγωνο με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Λύση. Έστω R η ακτίνα του κύκλου και $AB\Gamma$ ένα εγγεγραμμένο τρίγωνο. Αν με x, y, z συμβολίσουμε τις επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ τότε το εμβαδόν του $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2} R^2 (\sin x + \sin y + \sin z)$$

όπου $x + y + z = 2\pi$ και $0 < x, y, z < \pi$.

Επομένως ψάχνουμε να βρούμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $E(x, y, z)$ υπό τις συνθήκες $x + y + z = 2\pi$ και $0 < x, y, z < \pi$. Λύνοντας την συνθήκη $x + y + z = 2\pi$ ως προς z έχουμε $z = 2\pi - x - y$. Άρα η E παίρνει την μορφή

$$f(x, y) = \frac{1}{2}R^2 (\sin x + \sin y + \sin(2\pi - x - y)) = \frac{1}{2}R^2 (\sin x + \sin y - \sin(x + y))$$

όπου $0 < x < \pi$ και $0 < y < \pi$. Το $R = (0, \pi) \times (0, \pi)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, η f είναι C^2 και συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου.

Βρίσκουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f . Θεωρούμε το σύστημα $f_x(x, y) = \cos x - \cos(x + y) = 0$ και $f_y(x, y) = \cos y - \cos(x + y) = 0$. Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε $\cos x = \cos y$ οπότε (αφού $0 < x, y < \pi$) $x = y$. Άρα $\cos x = \cos 2x \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, οπότε $\cos x = 1$ ή $\cos x = -1/2$. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $x = 0$ (απορρίπτεται) και από την δεύτερη $x = 2\pi/3 = 120^\circ$ (δεκτή). Άρα το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

Υπολογίζοντας τις f_{xx} και $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ στο (x_0, y_0) βλέπουμε ότι $f_{xx}(x_0, y_0) = -\sqrt{3} < 0$ και $\Delta(x_0, y_0) = 9/4 > 0$ και άρα το (x_0, y_0) είναι τοπικό μέγιστο. Για να δείξουμε ότι είναι σημείο ολικού μεγίστου θεωρούμε την f ορισμένη στο συμπαγές $[0, \pi] \times [0, \pi]$. Επειδή η f μηδενίζεται στο σύνορο ενώ στο εσωτερικό παίρνει θετικές τιμές έπεται ότι τη μέγιστη τιμή η f την λαμβάνει στο εσωτερικό του $[0, \pi] \times [0, \pi]$. Άρα το σημείο (x_0, y_0) είναι στην ουσία το ολικό μέγιστο της f . Επειδή στο σημείο αυτό ισχύει $x_0 = y_0 = z_0 = 120^\circ$ το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Άσκηση 10. Δείξτε ότι απο όλα τα τρίγωνα με την ίδια περίμετρο το ισόπλευρο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

Λύση. Το εμβαδό ενός τριγώνου με πλευρές x, y, z δίνεται απο τον τύπο του Ήρωνα

$$E(x, y, z) = \sqrt{\tau(\tau - x)(\tau - y)(\tau - z)}$$

όπου $\tau = \frac{x + y + z}{2}$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου. Επομένως ψάχνουμε να βρούμε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $E(x, y, z)$ υπό τις συνθήκες $x, y, z > 0$ και $x + y + z = 2\tau$, όπου τ δεδομένος θετικός πραγματικός αριθμός. Λύνοντας την συνθήκη ως προς z έχουμε $z = 2\tau - x - y$. Άρα η $E(x, y, z)$ παίρνει την μορφή

$$f(x, y) = xy(2\tau - x - y)$$

όπου $x, y > 0$ και $x + y < 2\tau$. Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το εσωτερικό $Int(T)$ του ορθογώνιου ισοσκελούς τριγώνου T του $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(\tau, 0)$ και $(0, \tau)$. Θα δείξουμε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο που είναι τοπικό μέγιστο στο σημείο $(\tau/3, \tau/3)$. Έχουμε $f(x, y) = xy(2\tau - x - y) = 2\tau xy - x^2y - xy^2$ και άρα

$$f_x(x, y) = 2\tau y - 2xy - y^2 = y(2\tau - 2x - y) \text{ και } f_y(x, y) = 2\tau x - x^2 - 2xy = x(2\tau - x - 2y).$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} y(\tau - 2x - y) = 0 \\ x(2\tau - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

Επειδή $x, y \neq 0$ παίρνουμε την μοναδική λύση $x = y = 2\tau/3$. Άρα η f αν έχει τοπικό ακρότατο αυτό θα είναι μοναδικό και θα είναι στο σημείο $(x_0, y_0) = (2\tau/3, 2\tau/3)$. Θα δείξουμε τώρα ότι όντως η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο (x_0, y_0) . Έχουμε $f_{xx}(x, y) = -2y$, $f_{yy}(x, y) = -2x$, $f_{xy}(x, y) = 2\tau - 2x - 2y$ και άρα $f_{xx}(x_0, y_0) = -4\tau/3$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -4\tau/3$ και $f_{xy}(x_0, y_0) = -2\tau/3$. Συνεπώς

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ και } \Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = 4\tau^2/3 > 0$$

και άρα το $(2\pi/3, 2\pi/3)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Για να δείξουμε ότι είναι σημείο ολικού μεγίστου θεωρούμε την f ορισμένη σε όλο το τρίγωνο T . Επειδή η f μηδενίζεται στο σύνορο ενώ στο εσωτερικό παίρνει θετικές τιμές έπεται ότι τη μέγιστη τιμή η f την λαμβάνει στο εσωτερικό του T . Άρα το σημείο (x_0, y_0) είναι στην ουσία το ολικό μέγιστο της f . Επειδή στο σημείο αυτό ισχύει $x_0 = y_0 = z_0 = 2\pi/3$ έχουμε ότι το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Άσκηση 11. Δείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με το ίδιο άθροισμα ακμών ο κύβος έχει τον μεγαλύτερο όγκο.

Λύση. Ο όγκος ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με ακμές x, y, z είναι $V(x, y, z) = xyz$. Ψάχνουμε συνεπώς το μέγιστο της συνάρτησης $V(x, y, z) = xyz$ όταν $x, y, z > 0$ και $x+y+z = c$, όπου c δεδομένος θετικός αριθμός. Λύνοντας την συνθήκη ως προς z η V παίρνει την μορφή $f(x, y) = xy(c - x - y) = cxy - x^2y - xy^2$ με $x, y > 0$ και $x + y < c$. Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το εσωτερικό του τριγώνου T με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(c, 0)$ και $(0, c)$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} c - 2x - y = 0 \\ c - x - 2y = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x_0 = y_0 = c/3$. Επειδή $f_{xx}(x, y) = -2y$, $f_{yy}(x, y) = -2x$, $f_{xy}(x, y) = c - 2x - 2y$, έχουμε $f_{xx}(x_0, y_0) = -2c/3$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -2c/3$ και $f_{xy}(x_0, y_0) = -c/3$. Συνεπώς,

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ και}$$

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = 4c^2/9 - c^2/9 = c^2/3 > 0$$

και άρα το $(x_0, y_0) = (c/3, c/3)$ είναι το μοναδικό σημείο τοπικού μεγίστου της f στο εσωτερικό του T .

Για να δείξουμε ότι το $(x_0, y_0) = (c/3, c/3)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου θεωρούμε την f ορισμένη σε όλο το τρίγωνο T . Επειδή η f μηδενίζεται στο σύνορο του T ενώ στο εσωτερικό παίρνει θετικές τιμές έπεται ότι τη μέγιστη τιμή η f την λαμβάνει στο εσωτερικό του T . Άρα το σημείο (x_0, y_0) είναι στην ουσία το ολικό μέγιστο της f . Επειδή στο σημείο αυτό ισχύει $x_0 = y_0 = z_0 = c/3$ έχουμε ότι ο κύβος έχει τον μεγαλύτερο όγκο.