

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

Άσκηση 1. Να μελετηθεί ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$.

Άσκηση 2. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + 2x^2y + y^2 + \frac{2}{3}y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 3. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 8x^3 - 12xy + y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4x^2y + 4y^2 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 5. Βρείτε με διάφορους τρόπους το σημείο του επιπέδου $x + y + z = 3$ που είναι πλησιέστερο στο $(0, 0, 0)$.

Άσκηση 6. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό την συνθήκη $4x^2 + y^2 = 16$. Τι σημαίνει γεωμετρικά το πρόβλημα αυτό?

Άσκηση 7. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ στο ελλειψοειδές $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1\}$.

Άσκηση 8. (Υπαρξη ιδιοδιανύσματος συμμετρικού πίνακα) Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας και $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή, δηλαδή

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

(α) Δείξτε ότι $\nabla Q(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι μεταξύ όλων των τριγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε δεδομένο κύκλο το ισόπλευρο είναι το τρίγωνο με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Άσκηση 10. Δείξτε ότι από όλα τα τρίγωνα με την ίδια περίμετρο το ισόπλευρο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

Άσκηση 11. Δείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με το ίδιο άθροισμα ακμών ο κύβος έχει τον μεγαλύτερο όγκο.