

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Βρείτε το στερεό K πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση

$$\int_0^4 \left(\int_0^{2-\frac{1}{4}z} \left(\int_0^{1-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

και στην συνέχεια αλλάζτε τη σειρά ολοκλήρωσης σε $dz dy dx$.

Υπόδειξη: Από τα άκρα και την σειρά ολοκλήρωσης (πρώτα ως προς x) στο δοθέν ολοκλήρωμα καταλαβαίνουμε ότι η προβολή του K στο yz -επίπεδο είναι το χωρίο

$$D = \left\{ (y, z) : 0 \leq z \leq 4, 0 \leq y \leq 2 - \frac{1}{4}z \right\}.$$

Το χωρίο αυτό είναι ένα τρίγωνο με κορυφές (σε (x, y, z) συντεταγμένες) τα σημεία

$$A(0, 0, 0), B(0, 0, 4), \Gamma(0, 2, 0).$$

Βλέποντας τα άκρα του x (εσωτερικό ολοκλήρωμα) έχουμε ότι φράσσεται από τα επίπεδα $x = 0$ και

$$\Pi : x = 1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z.$$

Το επίπεδο Π διέρχεται από τα $B(0, 0, 4)$ και $\Gamma(0, 2, 0)$ και από το σημείο

$$\Delta(1, 0, 0)$$

του x -άξονα. Κάνοντας ένα σχήμα βλέπουμε ότι το K είναι το τετράεδρο με κορυφές τα τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ και με έδρες τα τέσσερα τρίγωνα που σχηματίζουν ανα τρία.

Θέλουμε να αλλάξουμε τώρα την ολοκλήρωση σε $dz dy dx$:

$$\int_{x=?}^{x=?} \left(\int_{y=?}^{y=?} \left(\int_{z=?}^{z=?} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Από τη σειρά ολοκλήρωσης βλέπουμε ότι ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς z και άρα πρέπει να βρούμε πρώτα την προβολή του K στο xy -επίπεδο. Η προβολή αυτή είναι το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$. Επειδή η εξωτερική ολοκλήρωση γίνεται ως προς x έχουμε ότι

$$0 \leq x \leq 1.$$

Η ευθεία που διέρχεται από τα $\Gamma(0, 2, 0)$ και $\Delta(1, 0, 0)$ έχει τύπο $y = 2 - 2x$ και άρα

$$0 \leq y \leq 2 - 2x.$$

Μέχρι τώρα έχουμε ότι το δοθέν ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=2-2x} \left(\int_{z=?}^{z=?} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Τα άκρα του z θα είναι δύο επιφάνειες. Η πρώτη προφανώς είναι η $z = 0$. Η άλλη καθορίζεται από το επίπεδο που διέρχεται από τα Δ, B και Γ , που ήταν το επίπεδο Π με εξίσωση $x = 1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$. Λύνοντας ως προς z έχουμε $z = 4 - 4x - 2y$ και άρα

$$0 \leq z \leq 4 - 4x - 2y.$$

Τελικά το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{4-4x-2y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

□

Άσκηση 2. Έστω K το μικρότερο από τα δύο μέρη που χωρίζει το επίπεδο $z = 2$ τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (σφαιρικό καπάκι). Να εκφράσετε το ολοκλήρωμα $I = \iiint_K f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ με όλους τους πιθανούς τρόπους διαδοχικής σειράς ολοκλήρωσης. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τον όγκο του K .

Υπόδειξη: Η προβολή του K στο xy -επίπεδο (δηλαδή στο επίπεδο με εξίσωση $z = 0$) είναι ο δίσκος

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 12\}$$

(προκύπτει από την εξίσωση της τομής της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ με το επίπεδο $z = 2$, ισοδύναμα από την απαλοιφή του z μεταξύ των δύο εξισώσεων). Οπότε το I γράφεται

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-\sqrt{12}}^{x=\sqrt{12}} \left(\int_{y=-\sqrt{12-x^2}}^{y=\sqrt{12-x^2}} \left(\int_{z=2}^{z=\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{y=-\sqrt{12}}^{y=\sqrt{12}} \left(\int_{x=-\sqrt{12-y^2}}^{x=\sqrt{12-y^2}} \left(\int_{z=2}^{z=\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z) \, dz \right) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Η προβολή του K στο yz -επίπεδο (δηλαδή στο επίπεδο με εξίσωση $x = 0$) είναι το χωρίο

$$D = \{(y, z) : -\sqrt{12} \leq y \leq \sqrt{12}, 2 \leq z \leq \sqrt{16-y^2}\}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=-\sqrt{12}}^{y=\sqrt{12}} \left(\int_{z=2}^{z=\sqrt{16-y^2}} \left(\int_{x=-\sqrt{16-y^2-z^2}}^{x=\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z) \, dx \right) dz \right) dy \\ &= \int_{z=2}^{z=4} \left(\int_{y=-\sqrt{16-z^2}}^{y=\sqrt{16-z^2}} \left(\int_{x=-\sqrt{16-y^2-z^2}}^{x=\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-\sqrt{12}}^{x=\sqrt{12}} \left(\int_{z=2}^{z=\sqrt{16-x^2}} \left(\int_{y=-\sqrt{16-x^2-z^2}}^{y=\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z) \, dy \right) dz \right) dx \\ &= \int_{z=2}^{z=4} \left(\int_{x=-\sqrt{16-z^2}}^{x=\sqrt{16-z^2}} \left(\int_{y=-\sqrt{16-x^2-z^2}}^{y=\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z) \, dy \right) dx \right) dz. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_K \frac{1}{x^2 + y^2 + (z-2)^2} \, dx \, dy \, dz,$$

όπου $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$ όπου $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Από το θεώρημα αντικατάστασης για σφαιρικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι

$$I = \iiint_{K^*} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - 2)^2} dr d\phi d\theta = \iiint_{K^*} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 - 4r \cos \theta + 4} dr d\phi d\theta,$$

όπου K^* το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ και $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Άρα, από το θεώρημα Fubini,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - 2)^2} d\phi \right) d\theta \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 - 4r \cos \theta + 4} d\theta \right) dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r \left(\int_0^\pi \frac{(r^2 - 4r \cos \theta + 4)'}{r^2 - 4r \cos \theta + 4} d\theta \right) dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r (\ln(r+2)^2 - \ln(r-2)^2) dr \\ &= \pi \int_0^1 r (\ln(r+2) - \ln(2-r)) dr = \frac{\pi}{2}(4 - 3 \ln 3). \end{aligned}$$

□

Άσκηση 4. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού K που φράσσεται από πάνω από τον κώνο $z^2 = x^2 + y^2$ και από κάτω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$

Υπόδειξη: Το χωρίο είναι xy -απλό. Θα βρούμε τα σημεία τομής των δύο επιφανειών από το σύστημα των δύο εξισώσεων, το οποίο μας δίνει $z = z^2$ άρα $z = 0$ και $z = 1$. Οι δύο επιφάνειες τέμνονται στο $z = 0$ και συγκεκριμένα στο $(0,0)$ και στο επίπεδο $z = 1$ με καμπύλη της τομής να είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ που είναι το ∂D_{xy} .

Επομένως για $z_1(x, y) = x^2 + y^2$ και $z_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ παίρνουμε

$$\iiint_K dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2 \right) dx dy,$$

όπου

$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Με χρήση μετασχηματισμού πολικών συντεταγμένων $T(r, \theta)$ με $J_T = r$ έχουμε ότι

$$D_{r,\theta} = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad T(D_{r,\theta}) = D_{xy}$$

Από το θεώρημα αντικατάστασης έπεται ότι

$$\iiint_K dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r - r^2) r d\theta dr = 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3) dr = \pi/6.$$

□

Άσκηση 5. Έστω K το χωρίο του 1ου ογδομημορίου που φράσσεται από τα επίπεδα $x + y - z + 1 = 0$ και $x + y = a$ όπου $a > 0$. Να προσδιορίσετε το a ώστε ο όγκος του στερεού να ισούται με $5/6$.

Υπόδειξη: Το χωρίο είναι xy -απλό με $0 \leq z \leq x + y + 1$. Επομένως, για $z_1(x, y) = 0$ και $z_2(x, y) = x + y + 1$ έχουμε ότι

$$\iiint_K dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz \right] dx dy = \iint_{D_{xy}} (x + y + 1) dx dy.$$

Το χωρίο D_{xy} γράφεται είτε ως x -απλό είτε ως y -απλό. Γράφουμε

$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \iiint_K dx dy dz &= \int_0^a \int_0^{a-x} (x + y + 1) dy dx = \int_0^a \left[xy + \frac{y^2}{2} + y \right]_0^{a-x} dx \\ &= \int_0^a (x(a-x) + (a-x)^2/2 + (a-x)) dx \\ &= [ax^2/2 - x^3/3 + a^2x/2 - ax^2/2 + x^3/6 + ax - x^2/2]_0^a \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3. \end{aligned}$$

Για να ισούται ο όγκος με $5/6$ θα πρέπει να ικανοποιείται η εξίσωση

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{5}{6}$$

ή, ισοδύναμα, $(a-1)(2a^2 + 5a + 5) = 0$, και τελικά συμπεραίνουμε ότι $a = 1$. □

Άσκηση 6. Το επίπεδο $x = c$ για $c > 0$ χωρίζει το τετράεδρο με γωνίες $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$ και $(0, 0, 0)$ σε δύο χωρία K_1 και K_2 . Να προσδιορίσετε την παράμετρο c ώστε τα K_1 και K_2 να έχουν τον ίδιο όγκο

Υπόδειξη: Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα τρία σημεία $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ και $C(0, 0, 3)$. Άρα, $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ και $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$. Το εξωτερικό τους γινόμενο που θα είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγεται από τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$ είναι το

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-6, -3, -2).$$

Επομένως, η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$6(x-1) + 3y + 2z = 0.$$

Για το z προκύπτει λοιπόν ότι $0 \leq z \leq 3 - 3x - 3y/2$, επομένως μπορούμε να γράψουμε τα δύο στερεά K_1 και K_2 ως xy -απλά, και συγκεκριμένα

$$\iiint_{K_1} dx dy dz = \iint_{D_{1xy}} (3 - 3x - 3y/2) dx dy, \quad \iiint_{K_2} dx dy dz = \iint_{D_{2xy}} (3 - 3x - 3y/2) dx dy$$

όπου για $z = 0$ έχουμε $6x + 3y = 6$, δηλαδή $2x + y = 2$, άρα

$$D_{1xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq c, 0 \leq y \leq 2 - 2x\}, \quad D_{2xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x\}.$$

Έτσι, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\iiint_{K_1} dx dy dz &= \int_0^c \int_0^{2-2x} (3-3x-3y/2) dy dx = \int_0^c \left[3y - 3xy - \frac{3y^2}{4} \right]_0^{2-2x} dx \\ &= \int_0^c [6-12x+6x^2-3(1-2x+x^2)] dx = [6x-6x^2+2x^3-3x+3x^2-x^3]_0^c \\ &= c^3-3c^2+3c = 1-(1-c)^3\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\iiint_{K_2} dx dy dz &= \int_c^1 \int_0^{2-2x} (3-3x-3y/2) dy dx = \int_c^1 \left[3y - 3xy - \frac{3y^2}{4} \right]_0^{2-2x} dx \\ &= \int_c^1 [6-12x+6x^2-3(1-2x+x^2)] dx = [6x-6x^2+2x^3-3x+3x^2-x^3]_c^1 \\ &= 1-(c^3-3c^2+3c) = (1-c)^3.\end{aligned}$$

Θέλουμε επομένως να ικανοποιείται η

$$1-(1-c)^3 = (1-c)^3$$

και συμπεραίνουμε ότι $c = 1 - 1/\sqrt[3]{2}$. □

Άσκηση 7. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού K στο 1ο ογδομήμριο που φράσσεται από τις επιφάνειες $xy = 1$, $xy = 2$, $xz = 1$, $xz = 3$, $y + z = 0$ και $y + z = 2$.

Υπόδειξη: Αν θέσουμε $u = xy$, $v = xz$ και $w = y + z$, τότε

$$1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 3, \quad 0 \leq w \leq 2.$$

Επομένως, θεωρούμε τον μετασχηματισμό $T'(x, y, z) = (u, v, w)$ με $(u, v, w) \in K^* = T'(K)$ όπου

$$K^* = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3, 0 \leq w \leq 2\}.$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι ίση με

$$J_T = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -xy - xz = -(u+v) \neq 0 \text{ στο χωρίο } K^*.$$

Επομένως, για τον $T = (T')^{-1}$ έχουμε $J_T = 1/J_{T'} = -1/(u+v)$ και $T(K^*) = K$. Από το θεώρημα αντικατάστασης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\iiint_K dx dy dz &= \iiint_{K^*} |J_T| du dv dw = \int_1^2 \left(\int_1^3 \left(\int_0^2 \frac{1}{u+v} dw \right) dv \right) du = 2 \int_1^2 \left(\int_1^3 \frac{1}{u+v} dv \right) du \\ &= 2 \int_1^2 [\ln|u+v|]_1^3 du = 2 \int_1^2 (\ln|u+3| - \ln|u+1|) du \\ &= 2[(u+3)\ln(u+3) - (u+3) - (u+1)\ln(u+1) + (u+1)]_1^2.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 8. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = x + y + z$, $uv = y + z$, $uvw = z$ υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_K (x+y+z)^n xyz \, dx \, dy \, dz$ όπου K είναι το τετράεδρο που φράσσεται από τις επιφάνειες $x = y = z = 0$ και $x + y + z = 1$.

Υπόδειξη: Έχουμε $z = uvw$, $y = uv - uvw$ και $x = u - (uv - uvw) - uvw = u - uv$ και άρα

$$\begin{aligned}x &= 0 \iff u(1-v) = 0 \iff u = 0 \text{ ή } v = 1, \\y &= 0 \iff uv - uvw = 0 \iff u = 0 \text{ ή } v = 0 \text{ ή } w = 1, \\z &= 0 \iff uvw = 0 \iff u = 0 \text{ ή } v = 0 \text{ ή } w = 0.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$x + y + z = 1 \iff (u - uv) + (uv - uvw) + uvw = u = 1.$$

Βλέπουμε συνεπώς ότι το σύνορο του τετράεδρου K μετασχηματίζεται στο $u = v = w = 1$, $u = v = w = 0$ και το K μετασχηματίζεται στον κύβο K^* με μοναδιαίες ακμές. Επιπλέον, η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού αυτού είναι η

$$J = \det \begin{bmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{bmatrix} = u^2v.$$

Από τα παραπάνω και το θεώρημα αντικατάστασης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\iiint_K (x+y+z)^n dx dy dz &= \iiint_{K^*} u^n u(1-v)uv(1-w)uvwu^2v du dv dw \\&= \int_0^1 u^{n+5} du \cdot \int_0^1 (1-v)v^3 dv \cdot \int_0^1 (1-w)w dw = \frac{1}{120(n+6)}.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 9. Δίνεται η λεία παραμετρική καμπύλη $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ και ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ τέτοιο ώστε για όλα τα $t \in [a, b]$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \lambda(t) \mathbf{r}'(t)$$

όπου λ συνεχής θετική συνάρτηση (δηλαδή σε κάθε σημείο της καμπύλης το πεδίο είναι παράλληλο προς την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό). Ναδειχθεί ότι

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} \|\mathbf{F}\| ds$$

Υπόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \lambda(t) \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\&= \int_a^b \lambda(t) \|\mathbf{r}'(t)\|^2 dt = \int_a^b (\lambda(t) \|\mathbf{r}'(t)\|) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\&= \int_a^b (\|\lambda(t)\mathbf{r}'(t)\|) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \|\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\| \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\&= \int_{\mathbf{r}} \|\mathbf{F}\| ds.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 10. Έστω C η καμπύλη που σχηματίζεται από την τομή των επιφανειών $z = 2 - x^2 - 2y^2$ (ελλειπτικό παραβολοειδές) και $z = x^2$ (παραβολικός κύλινδρος) στο πρώτο ογδομήνηρο (δηλαδή για $x, y, z \geq 0$). Βρείτε την μάζα ενός καλωδίου πυκνότητας $\delta(x, y, z) = xy$, κατά μήκος του τόξου της καμπύλης C με άκρα τα σημεία $(0, 1, 0)$ και $(1, 0, 1)$

Υπόδειξη: Η καμπύλη C δίνεται από τον τύπο

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ και } z = x^2\}.$$

Επειδή $x, y, z \geq 0$ παραμετρικοποιούμε το τόξο της καμπύλης με άκρα τα σημεία $((0, 1, 0)$ και $(1, 0, 1)$ θέτοντας

$$x = t, \quad y = \sqrt{1-t^2}, \quad z = t^2, \quad t \in [0, 1].$$

Ισοδύναμα, το τόξο της καμπύλης με άκρα τα σημεία $((0, 1, 0)$ και $(1, 0, 1)$ παραμετρικοποιείται μέσω της απεικόνισης $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{1-t^2}, t^2).$$

Υπολογίζουμε τις $x'(t) = 1$, $y'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$ και $z'(t) = 2t$. Η μάζα m του καλωδίου δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} m &= \int_{\mathbf{r}} \delta(x, y, z) \, ds = \int_0^1 \delta(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\ &= \int_0^1 \delta(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt \\ &= \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2} + 4t^2} \, dt \\ &= \int_0^1 t \sqrt{1+4t^2-4t^4} \, dt. \end{aligned}$$

Θέτοντας $u = t^2$ παίρνουμε

$$m = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+4u-4u^2} \, du = \frac{1}{2} \sqrt{2-(2u-1)^2} \, du.$$

Με την αντικατάσταση $v = 2u - 1$ έχουμε

$$m = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-v^2} \, dv,$$

που με τελική αντικατάσταση $v = \sqrt{2} \sin w$ δίνει ότι $m = \frac{\pi+2}{8}$. □

Άσκηση 11. Δίνεται η παραμετρική καμπύλη

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(το ίχνος της καμπύλης αυτής είναι το τμήμα της αστροειδούς καμπύλης

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$$

που περιέχεται στο 1ο τεταρτημόριο).

(α) Υπολογίστε το μήκος $L(\mathbf{r})$ της παραμετρικής καμπύλης.

(β) Έστω το πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y^2}{x^{5/3} + y^{5/3}}, \frac{x^2}{x^{5/3} + y^{5/3}} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_{\mathbf{r}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}.$$

Υπόδειξη: (α) Έχουμε $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)$ και άρα

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}} 1 \, ds = \int_0^{\pi/2} \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3 \cos^2 t (-\sin t))^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} \, dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} \, dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} \, dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} 3 |\cos t \cdot \sin t| \, dt = 3 \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t \, dt
 \end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t \, dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)' \cdot \sin t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)' \, dt = \frac{1}{2} (\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)) = 1/2$$

παίρνουμε τελικά $L(\mathbf{r}) = 3/2$.

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathbf{r}} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy \\
 &= \int_{\mathbf{r}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}} \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{x^2(t)y'(t) - y^2(t)x'(t)}{x^{5/3}(t) + y^{5/3}(t)} \, dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{x^2 y'(t) - y^2 x'(t)}{x^{5/3} + y^{5/3}} \, dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{3 \cos^6 t \sin^2 t \cos t - 3 \sin^6 t \cos^2 t (-\sin t)}{\cos^5(t) + \sin^5(t)} \, dt \\
 &= 3 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^7 t \sin^2 t + \sin^7 t \cos^2 t}{\cos^5(t) + \sin^5(t)} \, dt \\
 &= 3 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^5 t + \sin^5 t)}{\cos^5(t) + \sin^5(t)} \, dt \\
 &= 3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t \, dt = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \, dt.
 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \, dt$. Θέτοντας $u = 2t$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 u \, du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin u (-\cos u)' \, du \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sin u \cos u \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos^2 u \, du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 u \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 u) \, du \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} du - \int_0^{\pi} \sin^2 u \, du \right) = \frac{\pi}{2} - I \end{aligned}$$

και συνεπώς $2I = \frac{\pi}{2} \implies I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \, dt = \frac{\pi}{4}$. Αρα $\int_{\mathbf{r}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}} = \frac{3\pi}{16}$. □

Άσκηση 12. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και θετική συνάρτηση και έστω S το χωρίο του $\mathbb{R}^2$ κάτω από το γράφημα της f δηλαδή $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Έστω επίσης η παραμετρική καμπύλη

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b]$$

(οπότε το ίχνος της παραμετρικής καμπύλης $\mathbf{r}$ είναι η γραφική παράσταση της f). Τέλος έστω $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ το πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$$

Να αποδειχθεί ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ είναι ίσο με το εμβαδόν $E(S)$ του S .

Υπόδειξη: Έχουμε

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} y \, dx = \int_a^b y(t) x'(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt = E(S).$$

Άσκηση 13. Θεωρούμε την καμπύλη $\mathbf{r}$ με ίχνος C την ένωση του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{AO}$ με $O = (0, 0)$ και $A = (-2, 2\sqrt{3})$ και την παραβολή $x^2 = 2y$ από το O ως το $B = (k, \frac{k^2}{2})$ για $k \geq 0$. Θεωρώντας συνάρτηση πυκνότητας $\rho(x, y) = 1$, να υπολογίσετε το k ώστε το κέντρο μάζας της C να ανήκει στον άξονα y .

[Υπόδειξη: Το κέντρο μάζας (x^*, y^*) ενός λεπτού σύρματος πυκνότητας $\rho(x, y)$ και μάζας m το οποίο έχει τη μορφή μίας καμπύλης $\mathbf{r}$ δίνεται από την

$$x^* = \frac{1}{m} \int_{\mathbf{r}} x \rho(x, y) ds, \quad y^* = \frac{1}{m} \int_{\mathbf{r}} y \rho(x, y) ds, \quad m = \int_{\mathbf{r}} \rho(x, y) ds$$

(αντίστοιχα για τις 3 μεταβλητές)].

Υπόδειξη: Για να ανήκει το κέντρο μάζας της C στον άξονα y πρέπει να έχουμε $x^* = 0$. Η συνθήκη αυτή για $\rho(x, y) = 1$ γίνεται

$$\int_{\mathbf{r}} x ds = 0 \implies \int_{\mathbf{r}_1} x ds + \int_{\mathbf{r}_2} x ds = 0,$$

όπου $\mathbf{r}_1$ η καμπύλη με ίχνος το $\overline{AO}$ και $\mathbf{r}_2$ η καμπύλη με ίχνος το τμήμα της παραβολής $x^2 = 2y$ από O ως το B .

Θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του k ώστε να ισχύει $x^* = 0$. Έχουμε ότι η καμπύλη $\mathbf{r}_1$ δίνεται από την $\mathbf{r}_1(t) = (t, -\sqrt{3}t)$ για $t \in [-2, 0]$ και η $\mathbf{r}_2$ δίνεται από την $\mathbf{r}_2(t) = (t, \frac{t^2}{2})$ για $t \in [0, k]$. Συνεπώς,

$$\mathbf{r}'_1(t) = (1, -\sqrt{3}) \implies \|\mathbf{r}'_1(t)\| = 2$$

και

$$\mathbf{r}'_2(t) = (1, t) \implies \|\mathbf{r}'_2(t)\| = \sqrt{t^2 + 1}.$$

Τότε,

$$x^* = \int_{-2}^0 2t dt + \int_0^k t \sqrt{t^2 + 1} dt = [t^2]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{3} (t^2 + 1)^{3/2} \right]_0^k = \frac{1}{3} \left((k^2 + 1)^{3/2} - 13 \right),$$

απ' όπου προκύπτει ότι $k = \sqrt{13^{2/3} - 1}$. □

Άσκηση 14. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - xy, y^2 - x^2)$$

Να υπολογίσετε την παράμετρο $\kappa \neq 0$ ώστε το έργο που παράγεται από το πεδίο $\mathbf{F}$ κατά τη μετατόπιση ενός σωματιδίου κατά μήκος της παραβολής $y^2 = 2\kappa x$ από το $O = (0, 0)$ στο $P = (\kappa/2, \kappa)$ να είναι ίσο με $9/5$.

Υπόδειξη: Η παραβολή $y^2 = 2\kappa x$ έχει παραμέτρηση $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2\kappa}, t \right)$ για $t \in [0, \kappa]$. Άρα, $\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{t}{\kappa}, 1 \right)$ και $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \left(\frac{t^4}{4\kappa^2} - \frac{t^3}{2\kappa}, t^2 - \frac{t^4}{4\kappa^2} \right)$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\kappa \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^\kappa \left(\frac{t^4}{4\kappa^2} - \frac{t^3}{2\kappa}, t^2 - \frac{t^4}{4\kappa^2} \right) \cdot \left(\frac{t}{\kappa}, 1 \right) dt \\ &= \int_0^\kappa \left(\frac{t^5}{4\kappa^3} - \frac{t^4}{2\kappa^2} + t^2 - \frac{t^4}{4\kappa^2} \right) dt = \frac{9}{40} \kappa^3. \end{aligned}$$

Ζητάμε $\frac{9}{40} \kappa^3 = \frac{9}{5}$, συνεπώς $\kappa = 2$. □

Άσκηση 15. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\mathbf{r}} f ds$ με $f(x, y, z) = (x + yz)/(x^2 + y^2 + z^2)$ για $x, y, z \neq 0$ και $\mathbf{r}$ το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(1, 1, 1)$ και (a, a, a) με $a \neq 1$ και $a > 0$. Να περιγράψετε τι συμβαίνει όταν $a \rightarrow 0$ και όταν $a \rightarrow \infty$.

Υπόδειξη: Η παραμέτρηση του ευθύγραμμου τμήματος είναι $\mathbf{r}(t) = (1 + t(a-1), 1 + t(a-1), 1 + t(a-1))$, $t \in [0, 1]$, άρα $\mathbf{r}'(t) = (a-1, a-1, a-1)$ και $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{3}|a-1|$. Συνεπώς,

$$f(\mathbf{r}(t)) = \frac{2 + 3t(a-1) + t^2(a-1)^2}{3(1 + t(a-1))^2}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} f ds &= \int_0^1 \frac{2 + 3t(a-1) + t^2(a-1)^2}{3(1 + t(a-1))^2} \sqrt{3}|a-1| dt \\ &= \frac{\sqrt{3}|a-1|}{3} \int_0^1 \frac{(1 + t(a-1))(2 + t(a-1))}{(1 + t(a-1))^2} dt \\ &= \frac{|a-1|}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{2 + t(a-1)}{1 + t(a-1)} dt \\ &= \frac{|a-1|}{\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + t(a-1)} + 1 \right) dt \\ &= \frac{|a-1|}{\sqrt{3}} \left(\frac{\ln a}{a-1} + 1 \right). \end{aligned}$$

Για $a \geq 1$ έχουμε

$$\int_{\mathbf{r}} f ds = \frac{1}{\sqrt{3}}(\ln a + a - 1).$$

Για $0 < a < 1$ έχουμε

$$\int_{\mathbf{r}} f ds = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\ln a + a - 1).$$

Τέλος, παρατηρήστε ότι

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbf{r}} f ds = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{r}} f ds = \infty.$$

□