

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Έστω $f(x, y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x+t, y+t) = f(x, y)$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_x = -f_y$. (Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης που δεν είναι σταθερή είναι η $f(x, y) = x - y$)

Λύση. (α' τρόπος) Σταθεροποιούμε ένα σημείο (x_0, y_0) . Ορίζουμε την καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = x_0 + t$ και $y(t) = y_0 + t$ και θέτουμε

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t)) = f(x_0 + t, y_0 + t)$$

όπου $t \in \mathbb{R}$.

Από τον Κανόνα Αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(x_0 + t, y_0 + t) \cdot x'(t) + f_y(x_0 + t, y_0 + t) \cdot y'(t) \\ &= f_x(x_0 + t, y_0 + t) + f_y(x_0 + t, y_0 + t) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Από την άλλη μεριά, έχουμε ότι η F είναι σταθερή ($F(t) = f(x_0, y_0)$) και άρα

$$F'(t) = 0$$

Συνεπώς θα πρέπει

$$f_x(x_0 + t, y_0 + t) + f_y(x_0 + t, y_0 + t) = 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $t = 0$ έχουμε ότι

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow f_x(x_0, y_0) = -f_y(x_0, y_0)$$

Αυτό ισχύει για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και άρα $f_x = -f_y$.

(β' τρόπος) Σταθεροποιούμε ένα σημείο (x_0, y_0) . Από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας της f έχουμε

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \quad (1)$$

και άρα θέτοντας $h = k = t$ και χρησιμοποιώντας ότι $f(x_0 + t, y_0 + t) = f(x_0, y_0)$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0 + t) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)t - f_y(x_0, y_0)t}{\sqrt{2}|t|} &= 0 \Rightarrow \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0, y_0)t + f_y(x_0, y_0)t}{|t|} &= 0 \Rightarrow f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(t_1x, t_2y) = t_1t_2f(x, y) \quad (2)$$

για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $t_1, t_2 \geq 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι

$$f(x, y) = xf_x(x, y) = yf_y(x, y).$$

(Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης $f(x, y) = xy$)

Λύση. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Έστω $x(t_1, t_2) = x_0 t_1$ και $y(t_1, t_2) = y_0 t_2$ και

$$F(t_1, t_2) = f(x(t_1, t_2), y(t_1, t_2)) = f(x_0 t_1, y_0 t_2).$$

Από τον Κανόνα Αλυσίδας (για) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_1}(t_1, t_2) &= f_x(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1}(t_1, t_2) + f_y(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1}(t_1, t_2) \\ &= f_x(x_0 t, y_0 t) \cdot x_0 \end{aligned}$$

για κάθε $t_1, t_2 > 0$. Ομοίως,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_2}(t_1, t_2) &= f_x(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot \frac{\partial x}{\partial t_2}(t_1, t_2) + f_y(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot \frac{\partial y}{\partial t_2}(t_1, t_2) \\ &= f_y(x_0 t_1, y_0 t_2) \cdot y_0. \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, από την (2),

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}(t_1, t_2) = t_2 f(x_0, y_0)$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial t_2}(t_1, t_2) = t_1 f(x_0, y_0)$$

Άρα

$$x_0 f_x(x_0 t_1, y_0 t_2) = t_2 f(x_0, y_0)$$

και, αντίστοιχα,

$$y_0 f_y(x_0 t_1, y_0 t_2) = t_1 f(x_0, y_0)$$

για κάθε $t_1, t_2 > 0$. Θέτοντας $t_1 = t_2 = 1$ έχουμε ότι

$$x_0 f_x(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \text{ και } y_0 f_y(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

οπότε

$$x_0 f_x(x_0, y_0) = y_0 f_y(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 -συνάρτηση. Αν $f_x + f_y = 0$ δείξτε ότι $f_{xx} = f_{yy}$.

Λύση. Έχουμε $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_x = -f_y$. Παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε

$$(f_x)_x = (-f_y)_x \Rightarrow f_{xx} = -f_{yx} \quad (3)$$

Ομοίως, $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_y = -f_x$ και παραγωγίζοντας ως προς y παίρνουμε,

$$(f_y)_y = (-f_x)_y \Rightarrow f_{yy} = -f_{xy} \quad (4)$$

Όμως η f είναι C^2 και άρα από το Θεώρημα Schwarz έχουμε $f_{xy} = f_{yx}$. Συνεπώς από τις (3) και (4) παίρνουμε ότι $f_{xx} = f_{yy}$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, \pi)$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^x \cos y, & f_y(x, y) &= -e^x \sin y \\ f_{xx}(x, y) &= e^x \cos y \\ f_{yy}(x, y) &= e^x \cos y \end{aligned}$$

$$f_{xy}(x, y) = (f_x)_y = -e^x \sin y$$

Άρα

$$f_x(1, \pi) = -e, \quad f_y(1, \pi) = 0, \quad f_{xx}(1, \pi) = -e, \quad f_{yy}(1, \pi) = -e, \quad f_{xy}(1, \pi) = 0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, \pi)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(1, \pi) + f_x(1, \pi)(x - 1) + f_y(1, \pi)(y - \pi) + \\ &\quad \frac{1}{2} (f_{xx}(1, \pi)(x - 1)^2 + 2f_{xy}(1, \pi)(x - 1)(y - \pi) + f_{yy}(1, \pi)(y - \pi)^2) \\ &= e - e(x - 1) + \frac{1}{2} (-e(x - 1)^2 - e(y - \pi)^2) \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, 0)$ και εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x - 1)^2 + y^2}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ f_{xx}(x, y) &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Άρα

$$f_x(1, 0) = 2, \quad f_y(1, 0) = 0, \quad f_{xx}(1, 0) = -2, \quad f_{yy}(1, 0) = 2, \quad f_{xy}(1, 0) = 0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, 0)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(1, 0)(x - 1)^2 + 2f_{xy}(1, 0)(x - 1)y + f_{yy}(1, 0)y^2) \\ &= 2(x - 1) - (x - 1)^2 + y^2 \end{aligned}$$

Απο το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x^2 + y^2) - T_2(x, y)}{(x - 1)^2 + y^2} = 0$$

Άρα αν υπήρχε το $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x - 1)^2 + y^2}$, τότε θα υπήρχε και το

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{T_2(x, y)}{(x - 1)^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{2(x - 1) - (x - 1)^2 + y^2}{(x - 1)^2 + y^2}$$

και θα ήταν ίσα. Όμως το παραπάνω όριο δεν υπάρχει αφού για $x = 1 + u$ με $u \neq 0$, $u \rightarrow 0$ και $y = 0$ το όριο ισούται με

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u - u^2}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{2}{u} \right) - 1$$

το οποίο δεν υπάρχει. Άρα το $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x - 1)^2 + y^2}$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και τέτοια ώστε (i) $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και (ii) Υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $|f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)| \leq M$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $|f(x,y)| \leq \frac{M}{2}(|x| + |y|)^2$.

Λύση. Η προς απόδειξη ανισότητα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο αν $(x,y) = (0,0)$. Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον Τύπο Taylor υπάρχει (ξ_1, ξ_2) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi_1, \xi_2)x^2 + 2f_{xy}(\xi_1, \xi_2)xy + f_{yy}(\xi_1, \xi_2)y^2) \\ &= \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi_1, \xi_2)x^2 + 2f_{xy}(\xi_1, \xi_2)xy + f_{yy}(\xi_1, \xi_2)y^2) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \frac{1}{2} (|f_{xx}(\xi_1, \xi_2)|x^2 + 2|f_{xy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |xy| + |f_{yy}(\xi_1, \xi_2)|y^2) \\ &\leq \frac{M}{2} (x^2 + 2|xy| + y^2) = \frac{M}{2} (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$ και $f_{xy}(0,0) = 1$. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|} \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}.$$

Λύση. Το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι το $T_1(x,y) = 0$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Άρα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} = 0 \quad (5)$$

αφού $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq 1$, για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

((ii) Το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι το $T_2(x,y) = xy$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$$

Απο την σχέση αυτή παρατηρούμε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει, αφού διαφορετικά θα έπρεπε να υπήρχε και το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ που όμως, όπως ελέγχεται εύκολα (πάρτε τον x -άξονα και μετά την $y = x$) δεν υπάρχει.

Άσκηση 8. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 2$ και $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 4$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε τον τύπο της f .

Λύση. Από τον Τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2} [f_{xx}(\xi x, \xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x, \xi y)xy + f_{yy}(\xi x, \xi y)y^2]$$

όπου

$$T_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα παίρνουμε ότι

$$f(x, y) = 1 + x + 2y + \frac{1}{2} (4x^2 + 8xy + 4y^2) = 1 + x + 2y + 2x^2 + 4xy + 2y^2$$

Άσκηση 9. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ με $f(x_0, y_0) = f(0, 0)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\nabla f(\xi \mathbf{x}_0) \perp \mathbf{x}_0$ δηλαδή

$$f_x(\xi x_0, \xi y_0)x_0 + f_y(\xi x_0, \xi y_0)y_0 = 0$$

Λύση. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0, y_0) - f(0, 0) = \nabla f(\xi x_0, \xi y_0) \cdot (x_0, y_0) = f_x(\xi x_0, \xi y_0)x_0 + f_y(\xi x_0, \xi y_0)y_0$$

Επειδή $f(x_0, y_0) = f(0, 0)$ έπεται ότι $f_x(\xi x_0, \xi y_0)x_0 + f_y(\xi x_0, \xi y_0)y_0 = 0$.

Άσκηση 10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f_x(x, y)x + f_y(x, y)y \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο.

Λύση. Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ με $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Όπως και στο (i), από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0, y_0) = f(0, 0) + \nabla f(0 + \xi(x_0 - 0), 0 + \xi(y_0 - 0)) \cdot (x_0 - 0, y_0 - 0) = f_x(\xi x_0, \xi y_0)x_0 + f_y(\xi x_0, \xi y_0)y_0$$

Θέτοντας

$$x = \xi x_0 \text{ και } y = \xi y_0$$

παίρνουμε

$$f(x_0, y_0) = f(0, 0) + \frac{1}{\xi} (f_x(x, y)x + f_y(x, y)y)$$

και άρα από την υπόθεσή μας $f(x_0, y_0) \geq f(0, 0)$. Άρα η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 11. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες (i) $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, (ii) $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = |f_{xy}(x, y)|$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f .

Λύση. Έστω $(x, y) \neq (0, 0)$. Από τον Τύπο Taylor έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi x, \xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x, \xi y)xy + f_{yy}(\xi x, \xi y)y^2) \\ &= f(0, 0) + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi x, \xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x, \xi y)xy + f_{yy}(\xi x, \xi y)y^2) \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$a = f_{xx}(\xi x, \xi y) = f_{yy}(\xi x, \xi y) = |f_{xy}(\xi x, \xi y)|$$

Διακρίνουμε τις επόμενες δυνατές περιπτώσεις:

(1) $a = 0$. Τότε $f_{xx}(\xi x, \xi y) = f_{yy}(\xi x, \xi y) = f_{xy}(\xi x, \xi y) = 0$ και

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi x, \xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x, \xi y)xy + f_{yy}(\xi x, \xi y)y^2) = f(0, 0).$$

(2) $a > 0$ και $f_{xy}(\xi x, \xi y) = -a$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi x, \xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x, \xi y)xy + f_{yy}(\xi x, \xi y)y^2) \\ &= f(0, 0) + \frac{a}{2} (x^2 - 2xy + y^2) = f(0, 0) + \frac{a}{2} (x - y)^2 \geq f(0, 0) \end{aligned}$$

(3) $a > 0$ και $f_{xy}(\xi x, \xi y) = a$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi x, \xi y)x^2 + 2f_{xy}(\xi x, \xi y)xy + f_{yy}(\xi x, \xi y)y^2) \\ &= f(0, 0) + \frac{a}{2} (x^2 + 2xy + y^2) = f(0, 0) + \frac{a}{2} (x + y)^2 \geq f(0, 0) \end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση $f(x, y) \geq f(0, 0)$. Επειδή το (x, y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^2$ διάφορο του $(0, 0)$ έπεται ότι η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο.