

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

Άσκηση 1. Έστω $f(x, y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x + t, y + t) = f(x, y)$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_x = -f_y$. (Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης που δεν είναι σταθερή είναι η $f(x, y) = x - y$)

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(t_1x, t_2y) = t_1t_2f(x, y) \quad (1)$$

για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $t_1, t_2 \geq 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι

$$f(x, y) = xf_x(x, y) = yf_y(x, y).$$

(Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης $f(x, y) = xy$)

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 -συνάρτηση. Αν $f_x + f_y = 0$ δείξτε ότι $f_{xx} = f_{yy}$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε το πολώνυμο Taylor της $f(x, y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, \pi)$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε το πολώνυμο Taylor της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, 0)$ και εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x-1)^2 + y^2}$.

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και τέτοια ώστε (i) $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ και (ii) Υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $|f_{xx}(x, y)|, |f_{xy}(x, y)|, |f_{yy}(x, y)| \leq M$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $|f(x, y)| \leq \frac{M}{2} (|x| + |y|)^2$.

Άσκηση 7. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 0$ και $f_{xy}(0, 0) = 1$. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|} \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

Άσκηση 8. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0, 0) = 1$, $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 2$ και $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = 4$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε τον τύπο της f .

Άσκηση 9. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ με $f(x_0, y_0) = f(0, 0)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\nabla f(\xi \mathbf{x}_0) \perp \mathbf{x}_0$ δηλαδή

$$f_x(\xi x_0, \xi y_0)x_0 + f_y(\xi x_0, \xi y_0)y_0 = 0$$

Άσκηση 10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f_x(x, y)x + f_y(x, y)y \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 11. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες (i) $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, (ii) $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = |f_{xy}(x, y)|$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f .