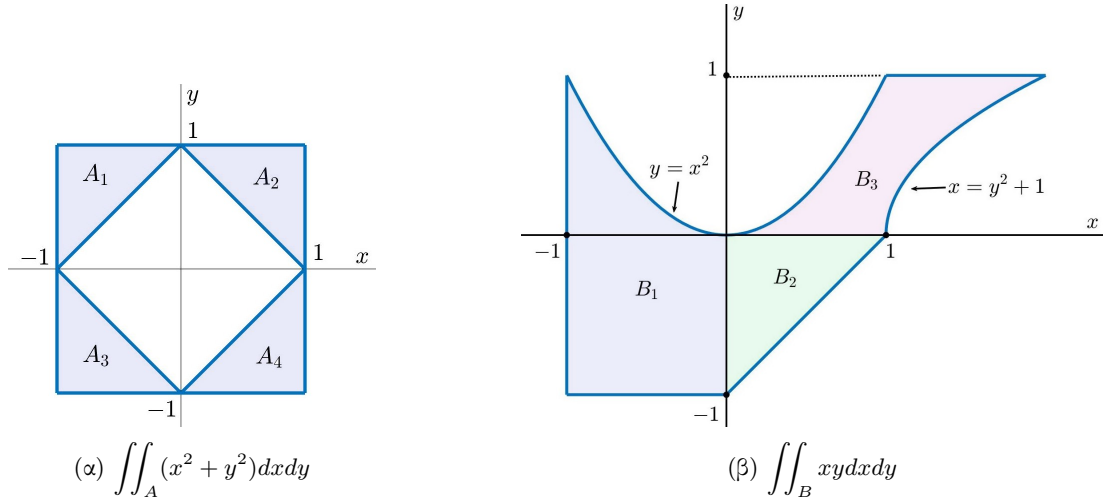


ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
 6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Να γράψετε καθένα από τα χωρία που φαίνονται στις εικόνες σαν ένωση x -απλών και y -απλών χωρίων και να υπολογίσετε τα αντίστοιχα διπλά ολοκληρώματα.



Υπόδειξη: (α) Τα τέσσερα χωρία μπορούν όλα να γραφούν είτε σαν x -απλά είτε σαν y -απλά:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, x+1 \leq y \leq 1\} \text{ (} x\text{-απλό)} \\
 &= \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq y-1\} \text{ (} y\text{-απλό)} \\
 A_2 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -x+1 \leq y \leq 1\} \text{ (} x\text{-απλό)} \\
 &= \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -y+1 \leq x \leq 1\} \text{ (} y\text{-απλό)} \\
 A_3 &= \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq -x-1\} \text{ (} x\text{-απλό)} \\
 &= \{(x, y) : -1 \leq y \leq 0, -1 \leq x \leq -y-1\} \text{ (} y\text{-απλό)} \\
 A_4 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq x-1\} \text{ (} x\text{-απλό)} \\
 &= \{(x, y) : -1 \leq y \leq 0, y+1 \leq x \leq 1\} \text{ (} y\text{-απλό)}.
 \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας, αρκεί να υπολογίσουμε το $\iint_{A_1} (x^2 + y^2) dx dy$ και να πολλαπλασιάσουμε επί 4. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 \int_{x+1}^1 (x^2 + y^2) dy dx &= \int_{-1}^0 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x+1}^1 dx = \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{3} - x^3 - \frac{(x+1)^3}{3} \right] dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x - \frac{x^4}{4} - \frac{(x+1)^4}{12} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Οπότε, $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy = 4 \cdot 1/2 = 2$.

(β) Τα τρία χωρία γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq x^2\} \quad x\text{-απλό} \\
 B_2 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 0\} \quad x\text{-απλό} \\
 B_3 &= \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1+y^2\} \quad y\text{-απλό}
 \end{aligned}$$

Έχουμε ότι $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, όπου τα τρία χωρία είναι Jordan μετρήσιμα στοιχειώδη χωρία με $B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset$ για $i, j = 1, 2, 3$ και $i \neq j$. Επομένως,

$$\iint_B xy dx dy = \iint_{B_1} xy dx dy + \iint_{B_2} xy dx dy + \iint_{B_3} xy dx dy.$$

Υπολογίζουμε τα

$$\begin{aligned} \iint_{B_1} xy dx dy &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^{x^2} dy dx = \int_{-1}^0 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{x^2} dx = \int_{-1}^0 \left[\frac{x^5}{2} - \frac{x}{2} \right] dx = \left[\frac{x^6}{12} - \frac{x^2}{4} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{6} \\ \iint_{B_2} xy dx dy &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{x-1}^0 dx = - \int_0^1 \frac{x(x-1)^2}{2} dx = - \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = - \frac{1}{24} \\ \iint_{B_3} xy dx dy &= \int_0^1 \left[\frac{yx^2}{2} \right]_{\sqrt{y}}^{1+y^2} dy = \int_0^1 y \frac{(1+y^2)^2 - y}{2} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y^4 + \frac{y^6}{6} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Άρα, $\iint_B xy dx dy = 1/6 - 1/24 + 5/12 = 13/24$. $\square$

Άσκηση 2 (μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος Schwarz για την ισότητα των μεικτών παραγώγων). Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό.

(α) Έστω $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν για κάθε ορθογώνιο $R \subseteq U$ ισχύει ότι $\iint_R h(x, y) dx dy = 0$, αποδείξτε ότι $h \equiv 0$.

(β) Αν $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 -συνάρτηση (δηλαδή με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης), αποδείξτε ότι για κάθε ορθογώνιο $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq U$ ισχύει ότι

$$\iint_R f_{xy}(x, y) dx dy = \iint_R f_{yx}(x, y) dx dy = f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c).$$

(γ) Αποδείξτε το θεώρημα Schwarz: κάθε C^2 -πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών έχει ίσες μεικτές παραγώγους δεύτερης τάξης.

Υπόδειξη: (α) Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπήρχε σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$ με $h(x_0, y_0) \neq 0$. Αν $h(x_0, y_0) = a > 0$ τότε λόγω συνέχειας θα υπήρχε και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $h(x, y) > a/2$ για κάθε (x, y) στην ανοικτή μπάλα B κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας δ . Έστω R το ορθογώνιο $R = [x_0, x_0 + \delta/2] \times [y_0, y_0 + \delta/2]$. Τότε $R \subseteq B$ και λόγω μονοτονίας του ολοκληρώματος

$$\iint_R h(x, y) dx dy \geq \iint_R \frac{a}{2} dx dy \geq \frac{a}{2} \cdot \frac{\delta^2}{4} > 0$$

άτοπο. Αντίστοιχα αν $h(x_0, y_0) < 0$.

(β) Εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini και το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_R f_{xy}(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d (f_x)_y(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b (f_x(x, d) - f_x(x, c)) dx \\ &= \int_a^b f_x(x, d) dx - \int_a^b f_x(x, c) dx \\ &= (f(b, d) - f(a, d)) - (f(b, c) - f(a, c)) \\ &= f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c). \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για το $\iint_R f_{yx}(x, y) dx dy$.

(γ) Από το (α) προκύπτει ότι αν $h_1, h_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς τέτοιες ώστε για κάθε ορθογώνιο $R \subseteq U$, $\iint_R h_1(x, y) dx dy = \iint_R h_2(x, y) dx dy$ τότε $h_1 = h_2$ (θεωρούμε απλά την διαφορά $h = h_1 - h_2$). Το συμπέρασμα τώρα έπεται άμεσα από το (β). $\square$

Άσκηση 3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D (x+y)^2 dx dy$, όπου D είναι το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $x+y=2$, $x+y=4$, $x^2-y^2=4$ και $y=x$.

Υπόδειξη: Επειδή $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ οι συνθήκες για το σύνορο του D μας οδηγούν στον μετασχηματισμό

$$u = x + y, \quad v = x - y \quad (1)$$

Έτσι το χωρίο D του xy -επιπέδου μετασχηματίζεται στο χωρίο A του uv -επιπέδου με σύνορο τις ευθείες $u=2$, $u=4$, $uv=4$, $v=0$. Από την (1) έπεται εύκολα ότι

$$x = \frac{u+v}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Έχουμε

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2$$

άρα, από το θεώρημα αντικατάστασης,

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)^2 dx dy &= \frac{1}{2} \iint_A u^2 du dv = \frac{1}{2} \int_2^4 \int_0^{\frac{4}{u}} u^2 du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_2^4 u^2 \left(\int_0^{\frac{4}{u}} dv \right) dv = \frac{1}{2} \int_2^4 u^2 \frac{4}{u} du \\ &= 2 \int_2^4 u du = 12. \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 4. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} y \sin |x - y^2| dx dy.$$

Υπόδειξη:

$$y \sin |x - y^2| = \begin{cases} y \sin(x - y^2), & x \geq y^2 \\ -y \sin(x - y^2), & x < y^2 \end{cases}$$

Αν

$$D_1 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$$

τότε $D = D_1 \cup D_2$, $D_1^\circ \cap D_2^\circ = \emptyset$ και

$$\begin{aligned} \int_{D_1} y \sin |x - y^2| dx dy &= \int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin(x - y^2) dx dy = - \int_0^1 [y \cos(x - y^2)]_{y^2}^1 dy \\ &= - \int_0^1 y [\cos(1 - y^2) - 1] dy = \frac{1}{2} [\sin(1 - y^2) + y^2]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} [1 - \sin(1)], \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}\int_{D_2} y \sin |x - y^2| dx dy &= - \int_0^1 \int_0^{y^2} y \sin(x - y^2) dx dy = \int_0^1 [y \cos(x - y^2)]_0^{y^2} dy \\ &= \int_0^1 y [1 - \cos(-y^2)] dy = \frac{1}{2} [y^2 - \sin(y^2)]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} [1 - \sin(1)].\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τα δύο ολοκληρώματα παίρνουμε

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} y \sin |x - y^2| dx dy = 1 - \sin(1).$$

□

Άσκηση 5. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{(x+3y)^3}{(2x^2+2xy+13y^2)^{3/2}} dx dy$, όπου D το χωρίο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 2xy + 13y^2 \leq 1, 1 \leq 2x + 6y \leq 2\}.$$

Υπόδειξη: Πρώτα εφαρμόζουμε μετασχηματισμό για να απλουστεύσουμε την f . Θέτουμε $u = x + 3y$ και $v = x - 2y$. Λύνοντας ως προς x και y έχουμε

$$x = \frac{2u+3v}{5}, \quad y = \frac{u-v}{5} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Άρα, ο γραμμικός μετασχηματισμός $T(u, v) = (x, y)$ έχει ορίζουσα

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι $u^2 + v^2 = (x+3y)^2 + (x-2y)^2 = 2x^2 + 13y^2 + 2xy$. Τότε, $D = T(D')$ όπου

$$D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1, \frac{1}{2} \leq u \leq 1\}$$

Από το θεώρημα αντικατάστασης έχουμε

$$\iint_D \frac{(x+3y)^3}{(2x^2+2xy+13y^2)^{3/2}} dx dy = \iint_{D'} f(T(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \iint_{D'} \frac{u^3}{(u^2+v^2)^{3/2}} du dv$$

Τώρα, εφαρμόζουμε πολικό μετασχηματισμό $T_1(r, \theta) = (u = r \cos \theta, v = r \sin \theta)$ με $D' = T_1(D'')$ όπου

$$D'' = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, \frac{1}{2} \leq r \cos \theta \leq 1 \right\} = \left\{ (r, \theta) : -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3, \frac{1}{2 \cos \theta} \leq r \leq 1 \right\} \quad (\theta\text{-απλό})$$

Γνωρίζοντας ότι $dudv = |J_{T_1}|drd\theta = rdrd\theta$, από το θεώρημα αντικατάστασης παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{(x+3y)^3}{(2x^2+2xy+13y^2)^{3/2}} dx dy &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^1 \frac{(r\cos\theta)^3}{r^3} r dr d\theta \\
&= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3\theta \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\frac{1}{2\cos\theta}}^1 d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3\theta \left[1 - \frac{1}{4\cos^2\theta} \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[\cos^3\theta - \frac{1}{4}\cos\theta \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3\theta d\theta - \frac{1}{8} [\sin\theta]_{-\pi/3}^{\pi/3} \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{-\pi/3}^{\pi/3} - \frac{\sqrt{3}}{8} \\
&= \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right] - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, όπου D είναι το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις καμπύλες

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x, \quad y = 0.$$

Υπόδειξη: Οι εξισώσεις $x^2 + y^2 = 2x$ και $x^2 + y^2 = 4x$ απεικονίζουν δύο κύκλους C_1 και C_2 με κέντρα τα σημεία $K_1(1, 0)$ και $K_2(2, 0)$ και με ακτίνες $R_1 = 1$ και $R_2 = 2$ αντίστοιχα με τον C_1 να εφάπτεται τον C_2 εσωτερικά στο σημείο $(0, 0)$. Μετατρέποντας σε πολικές συντεταγμένες ($x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι οι ευθείες $y = 0$ και $y = x$ δίνουν

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Επίσης το χωρίο μεταξύ των κύκλων C_1 και C_2 περιγράφεται από την ανισότητα

$$2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \iff 2\cos\theta \leq \rho \leq 4\cos\theta$$

Άρα το χωρίο D του xy -επιπέδου μετασχηματίζεται στο χωρίο

$$\Delta = \{(\theta, \rho) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ και } 2\cos\theta \leq \rho \leq 4\cos\theta\}$$

Συνεπώς, από τον κανόνα αντικατάστασης για πολικές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned}
 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{\Delta} \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \rho^2 d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} d\theta = \frac{56}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{56}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \cos \theta d\theta = \frac{56}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{56}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - t^2) dt = \frac{56}{3} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dt - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 dt \right) \\
 &= \frac{56}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} \right) = \frac{70\sqrt{2}}{9}.
 \end{aligned}$$

□

Άσκηση 7. Υπολογίστε το $\iint_A y dx dy$ όπου A το χωρίο που ορίζεται από τις

$$1 \leq x^2 + y^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x.$$

Υπόδειξη: Κάνοντας ένα σχήμα και μετατρέποντας σε πολικές συντεταγμένες $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ είναι εύκολο να

δούμε ότι $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ και $1 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos \theta}$.

Συνεπώς το ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\begin{aligned}
 \iint_A y dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\frac{2}{\cos \theta}} \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^{\frac{2}{\cos \theta}} \rho^2 d\rho \right) \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{8}{\cos^3 \theta} - 1 \right) \sin \theta d\theta \\
 &= -\frac{1}{3} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{8}{u^3} - 1 \right) du \\
 &= \frac{4}{3} \frac{1}{u^2} \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{3} u \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{6}.
 \end{aligned}$$

□

Άσκηση 8. Εφαρμόστε κατάλληλες αλλαγές συντεταγμένων προκειμένου να υπολογίσετε τα ακόλουθα διπλά ολοκληρώματα:

(α) $\iint_A \frac{1}{x^2 y^2} dx dy$, όπου A το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 3y^2$.

(β) $\iint_B x^2 y^2 dx dy$, όπου B το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $y = 3x^2$, $xy = 2$, $xy = 6$.

$$(γ) \iint_C (2x + y^2) dx dy, \text{ όπου } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \leq 0, 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

$$(δ) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ όπου } D \text{ το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από τις καμπύλες } xy = 2, xy = 4, x^2 - y^2 = 2 \text{ και } x^2 - y^2 = 5.$$

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε $u = \frac{y}{x^2}$ και $v = \frac{x}{y^2}$ και ορίζουμε τον μετασχηματισμό $(u, v) = T'(x, y)$. Προκύπτει λοιπόν ότι $T'(A) = A' = [1, 2] \times [1, 3]$ και

$$J_{T'} = \begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{4}{x^2 y^2} - \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{3}{x^2 y^2} = 3u^2 v^2 \quad \text{το οποίο είναι } \neq 0 \text{ στο } [1, 2] \times [1, 3]$$

Αν θέσουμε $T = (T')^{-1}$ τότε από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης έχουμε ότι $J_T = 1/J_{T'} = 1/(3u^2 v^2)$. Παρατηρούμε ότι $u^2 v^2 = \frac{1}{x^2 y^2}$. Από το θεώρημα αντικατάστασης έχουμε

$$\iint_A \frac{1}{x^2 y^2} dx dy = \iint_{A'} f(T(u, v)) |J_T| du dv = \int_1^2 \int_1^3 u^2 v^2 \frac{1}{3u^2 v^2} du dv = \frac{2}{3}.$$

(β) Θέτουμε $x = v$ και $y = u/v$ και θεωρούμε τον μετασχηματισμό $T(u, v) = (v, u/v) = (x, y)$. Θέλουμε να βρούμε το B' με $T(B') = B$. Οι καμπύλες $xy = 2$ και $xy = 6$ δίνουν $u = 2$ και $u = 6$. Επομένως από την $y = x^2$ παίρνουμε $u/v = v^2 \implies v = u^{1/3}$. Ομοίως, από την $y = 3x^2$ παίρνουμε $v = (u/3)^{1/3}$. Συνεπώς,

$$B' = \{(x, y) : 2 \leq u \leq 6, (u/3)^{1/3} \leq v \leq u^{1/3}\} \quad u\text{-απλό χωρίο.}$$

Επιπλέον,

$$J_T(u, v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{v} & \frac{-u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{v} \quad v \neq 0 \text{ στο χωρίο } B'$$

Από το θεώρημα αντικατάστασης έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^2 dA &= \iint_{D'} f(T(u, v)) |J_T| du dv = \iint_{D'} v^2 \frac{u^2}{v^2} \left| \frac{1}{v} \right| du dv \\ &= \int_2^6 \left(\int_{(u/3)^{1/3}}^{u^{1/3}} \frac{u^2}{v} dv \right) du = \int_2^6 [u^2 \ln v]_{(u/3)^{1/3}}^{u^{1/3}} du \\ &= \int_2^6 \frac{1}{3} u^2 \ln(3) du = \left[\frac{1}{9} \ln(3) u^3 \right]_2^6 = \frac{208 \ln(3)}{9}. \end{aligned}$$

(γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$. Επομένως, έχουμε ότι το C' με $T(C') = C$ θα είναι το

$$x \leq 0, y \geq 0 \implies \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \implies 2 \leq r^2 \leq 3.$$

Δηλαδή $C' = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \times [\pi/2, \pi]$. Γνωρίζοντας ότι $J_T = r$, από το θεώρημα αντικατάστασης παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \iint_C (2x + y^2) dx dy &= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (2r \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{2r^3}{3} \cos \theta + \frac{r^4}{4} \sin^2 \theta \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{2(\sqrt{3}^3 - \sqrt{2}^3)}{3} \cos \theta + \frac{5}{4} \sin^2 \theta \right] d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{2(\sqrt{3}^3 - \sqrt{2}^3)}{3} \cos \theta + \frac{5}{8} (1 - \cos(2\theta)) \right] d\theta \\ &= \left[\frac{2(\sqrt{3}^3 - \sqrt{2}^3)}{3} \sin \theta + \frac{5}{8} \theta - \frac{5}{16} \sin(2\theta) \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{3} + \frac{5\pi}{16}. \end{aligned}$$

(δ) Θέτουμε $u = xy$ και $v = x^2 - y^2$ και θεωρούμε τον μετασχηματισμό $T'(x, y) = (xy, x^2 - y^2) = (u, v)$. Άμεσα μπορούμε να δούμε ότι $T'(D) = D' = [2, 4] \times [2, 5]$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$4u^2 + v^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 \implies x^2 + y^2 = \sqrt{4u^2 + v^2}$$

και

$$J_{T'}(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2) \neq 0, \quad \forall (x, y) \in D$$

Άρα ορίζουμε $T = (T')^{-1}$ με $J_T = 1/J_{T'} = -\frac{1}{2(x^2 + y^2)} = -1/2(\sqrt{4u^2 + v^2})$. Από το θεώρημα αντικατάστασης έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(T(u, v)) |J_T| du dv = \int_2^4 \int_2^5 \sqrt{4u^2 + v^2} \frac{1}{\sqrt{4u^2 + v^2}} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_2^4 \int_2^5 du dv = 3. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 9. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$, όπου D είναι το χωρίο του επιπέδου που περιορίζεται από τους κύκλους

$$\frac{x}{2} \leq x^2 + y^2 \leq x, \quad \frac{y}{2} \leq x^2 + y^2 \leq y.$$

Υπόδειξη: Οι συνθήκες για το σύνορο του D μας ωθούν στον μετασχηματισμό

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

(Ο μετασχηματισμός $(x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ είναι η λεγόμενη αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο όπου ένα σημείο $\mathbf{X}$ του επιπέδου διάφορο της αρχής $\mathbf{0} = (0, 0)$ των αξόνων απεικονίζεται στο μοναδικό σημείο

$\mathbf{X}'$ που βρίσκεται στην ημιευθεία με αρχή το $\mathbf{0}$ που διέρχεται από το $\mathbf{X}$ με την ιδιότητα $|\mathbf{OX}| \cdot |\mathbf{OX}'| = 1$ ($|\mathbf{OX}|, |\mathbf{OX}'|$, τα μήκη των ευθ. τμημάτων $\mathbf{OX}$ και $\mathbf{OX}'$). Ο μετασχηματισμός αυτός απεικονίζει το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο εξωτερικό του αφήνοντας τον μοναδιαίο κύκλο σταθερό. Επίσης απεικονίζει τους κύκλους που διέρχονται από το $\mathbf{0}$ σε ευθείες και αντίστροφα.)

Παρατηρούμε ότι με αυτόν τον μετασχηματισμό το χωρίο D του xy -επιπέδου απεικονίζεται στο τετράγωνο

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u, v \leq 2\}.$$

Επιπλέον,

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

και

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} = -(u^2 + v^2).$$

Άρα,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{u^2 + v^2}$$

οπότε από το θεώρημα αντικατάστασης,

$$\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \iint_T (u^2 + v^2) \frac{1}{u^2 + v^2} du dv = \iint_T du dv = \int_1^2 \int_1^2 du dv = 1.$$

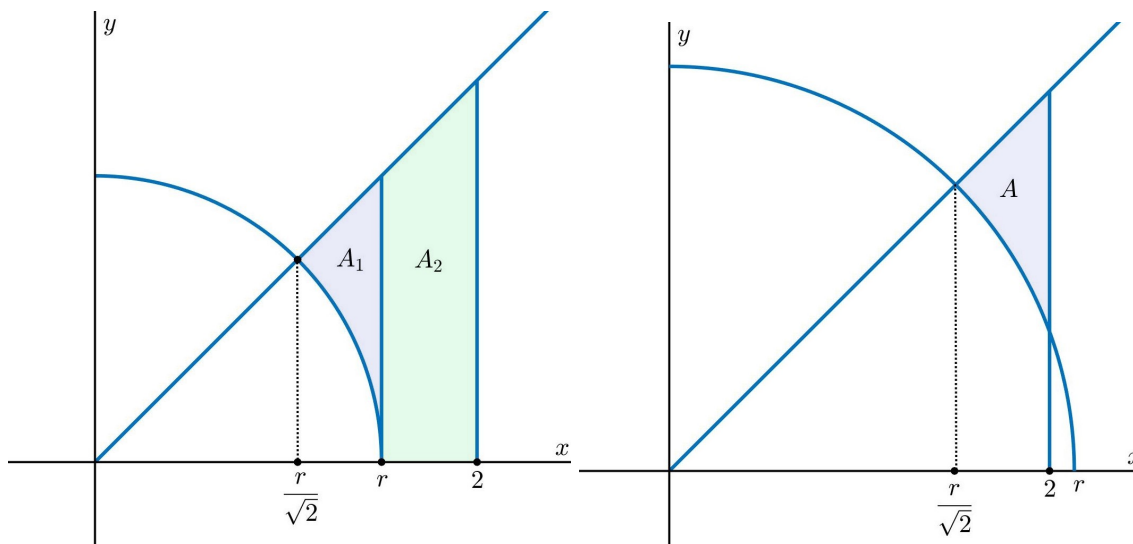
Άσκηση 10. Υπολογίστε το $\iint_A y dx dy$ όπου A το χωρίο που ορίζεται από τις

$$b^2 \leq x^2 + y^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x$$

για $b \geq 0$.

Υπόδειξη: Για $0 \leq x \leq 2$ η τομή του κύκλου $x^2 + y^2 = b^2$ και της $y = x$ είναι το σημείο $(b/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$. Επομένως, για $b/\sqrt{2} > 2$ έχουμε $A = \emptyset$ και το ολοκλήρωμα είναι ίσο με μηδέν.

Για $0 \leq b \leq 2\sqrt{2}$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις $0 \leq b \leq 2$ και $2 \leq b \leq 2\sqrt{2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα:



Περίπτωση $0 \leq b \leq 2$: Βλέπουμε ότι το χωρίο A γράφεται ως ένωση δύο x -απλών χωρίων

$$A_1 = \{(x, y) : b/\sqrt{2} \leq x \leq b, \sqrt{b^2 - x^2} \leq y \leq x\}, \quad A_2 = \{(x, y) : b \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$$

με $A_1^\circ \cap A_2^\circ = \emptyset$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \iint_A y dx dy &= \iint_{A_1} y dx dy + \iint_{A_2} y dx dy \\ &= \int_{b/\sqrt{2}}^b \int_{\sqrt{b^2 - x^2}}^x y dy dx + \int_b^2 \int_0^x y dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{b/\sqrt{2}}^b (2x^2 - b^2) dx + \frac{1}{2} \int_b^2 x^2 dx \\ &= \frac{4}{3} + \frac{1}{6} b^3 (\sqrt{2} - 2). \end{aligned}$$

Περίπτωση $2 < b \leq 2\sqrt{2}$: Τότε,

$$\begin{aligned} \iint_A y dx dy &= \int_{b/\sqrt{2}}^2 \int_{\sqrt{b^2 - x^2}}^x y dy dx = \frac{1}{2} \int_{b/\sqrt{2}}^2 (2x^2 - b^2) dx \\ &= \frac{8}{3} - b^2 + \frac{1}{3\sqrt{2}} b^3. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 11. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό από πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{A'} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin \theta / r + 1/r^2}} dr d\theta$$

όπου $A' = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, r \cos \theta \leq 1, r \sin \theta \leq 1\}$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι $\theta \in [0, \pi/2]$ το οποίο σημαίνει ότι $x, y \geq 0$ και οι $r \cos \theta, r \sin \theta \leq 1$ σημαίνουν ότι $x, y \leq 1$. Επομένως, για $T(r, \theta) = (x, y)$ έχουμε ότι $T(A') = A = [0, 1] \times [0, 1]$. Οπότε γνωρίζοντας ότι $J_T = r$, από το θεώρημα αντικατάστασης έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_{A'} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin \theta / r + 1/r^2}} dr d\theta &= \iint_{A'} \frac{1}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r \sin \theta + 1}} r dr d\theta = \iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y + 1}} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y + 1}} dx dy = 2 \int_0^1 \left[\sqrt{x^2 + y + 1} \right]_0^1 dx \\ &= 2 \int_0^1 \left[\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1} \right] dx = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 12. Να βρείτε το εμβαδόν της φραγμένης επίπεδης περιοχής D που ορίζεται από τις τέσσερις παραβολές $y = x^2, y = 2x^2, x = y^2, x = 3y^2$.

Υπόδειξη: Οι συνθήκες για το σύνορο του D μας ωθούν στον μετασχηματισμό

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x}$$

Παρατηρούμε ότι με αυτόν τον μετασχηματισμό το χωρίο D του xy -επιπέδου μετασχηματίζεται στο ορθογώνιο

$$R = \{(u, v) : \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \text{ και } \frac{1}{3} \leq v \leq 1\}.$$

Επιπλέον,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x/y & -x^2/y^2 \\ -y^2/x^2 & 2y/x \end{vmatrix} = 3,$$

και άρα $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1/3$. Οπότε, από το θεώρημα αντικατάστασης,

$$\begin{aligned} \iint_D dx \, dy &= \iint_R \frac{1}{3} du \, dv = \frac{1}{3} \left(\int_{1/2}^1 du \right) \cdot \left(\int_{1/3}^1 \frac{1}{v^2} dv \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 13. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \, x \geq 0 \right\}$.

Υπόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε γενικευμένες πολικές συντεταγμένες. Θέτουμε

$$x = a\rho \cos \theta, \, y = b\rho \sin \theta, \, \rho = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 0$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού αυτού γράφεται

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού το D γράφεται

$$\rho^4 \leq \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta \iff \rho^4 \leq \rho^2 \cos 2\theta \iff \rho^2(\rho^2 - \cos 2\theta) \leq 0 \iff \rho^2 \leq \cos 2\theta.$$

Ειδικότερα,

$$\cos 2\theta \geq 0 \implies -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

και το D είναι η εικόνα, μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού, του χωρίου

$$D^* = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{\cos 2\theta}, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

Συνεπώς,

$$\iint_D dx \, dy = \iint_{D^*} ab\rho \, d\rho \, d\theta = ab \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \rho \, d\rho \right) d\theta = \frac{ab}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{ab}{2}$$

Παρατήρηση: Μέσω του μετασχηματισμού της αντιστροφής (δείτε και Άσκηση 9)

$$T : x \rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y \rightarrow \frac{y}{x^2 + y^2}$$

έχουμε ότι $D = T(Y)$ όπου $Y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 1, \, x \geq a \right\}$.

□

Άσκηση 14. Να βρεθεί ο όγκος V του στερεού K που φράσσεται από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$ και το επίπεδο $z = 0$.

Υπόδειξη: Έχουμε

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Συνεπώς, αν D είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2 + y^2 \leq 9$ του xy -επιπέδου και $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ τότε

$$V = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Έχουμε

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \rho \, \rho \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \rho^2 \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^3 d\phi = 9 \int_0^{2\pi} d\phi = 18\pi.$$

□

Άσκηση 15. Να βρεθεί ο όγκος V του στερεού K που φράσσεται από κάτω από το επίπεδο $z = 0$ και από πάνω από το κυκλικό παραβολοειδές $z = 1 - x^2 - y^2$.

Υπόδειξη: Η τομή του παραβολοειδούς $z = 1 - x^2 - y^2$ με το επίπεδο $z = 0$ είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$. Έχουμε

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

Συνεπώς αν D είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2 + y^2 = 1$ του xy -επιπέδου και $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ τότε

$$V = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D 1 - x^2 - y^2 \, dx \, dy.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2) \, \rho \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho - \rho^3) \, d\rho \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 d\phi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 16. Μια λεπτή πλάκα έχει τη μορφή του μέρους ενός κυκλικού δακτυλίου με εξίσωση $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, και έχει πυκνότητα ανάλογη της απόστασης από το κέντρο. Να βρείτε το κέντρο μάζας της πλάκας.

Υπόδειξη: Η πυκνότητα είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο, δηλαδή έχουμε $\rho(x, y) = \lambda \sqrt{x^2 + y^2}$ για κάποιον $\lambda > 0$, γιατί είναι μη αρνητική συνάρτηση. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες

$T(r, \theta) = (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$ με $J_T = r$ και αφού το χωρίο είναι το $A = \{(x, y) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x, y \geq 0\}$, το A' με $T(A') = A$ είναι το

$$A' = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

Από το θεώρημα αντικατάστασης έχουμε ότι η μάζα του A είναι

$$\begin{aligned} m(A) &= \iint_A \rho(x, y) dx dy = \iint_A \lambda \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{A'} \lambda r^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_a^b \lambda r^2 dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\lambda \frac{r^3}{3} \right]_a^b d\theta \\ &= \pi \lambda \frac{b^3 - a^3}{6}. \end{aligned}$$

Το κέντρο μάζας (x^*, y^*) έχει συντεταγμένες

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{m(A)} \iint_A x \rho(x, y) dx dy = \frac{6}{\pi \lambda (b^3 - a^3)} \int_0^{\pi/2} \int_a^b \lambda r^3 \cos \theta dr d\theta = \frac{3(b^4 - a^4)}{2\pi(b^3 - a^3)} \\ y^* &= \frac{1}{m(A)} \iint_A y \rho(x, y) dx dy = \frac{6}{\pi \lambda (b^3 - a^3)} \int_0^{\pi/2} \int_a^b \lambda r^3 \sin \theta dr d\theta = \frac{3(b^4 - a^4)}{2\pi(b^3 - a^3)}. \end{aligned}$$

□