

Κυρτή Ανάλυση (2024–25)

Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Ημερομηνία παράδοσης: 18 Μαΐου 2025)

1. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ άνω φραγμένη κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.
(β) Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση και έστω ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αφρινική συνάρτηση $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Έστω C μη κενό, ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$$

για κάθε $x, y \in C$.

3. Έστω C κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \text{dist}(x, C)$.

- (α) Έστω $x \notin C$. Αποδείξτε ότι

$$\nabla f(x) = \frac{x - p_C(x)}{\|x - p_C(x)\|_2}.$$

- (β) Αποδείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n \setminus C$.

4. (α) Έστω A, B μη κενά, συμπαγή και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αν $C = \text{conv}(A \cup B)$ αποδείξτε ότι

$$h_C(x) = \max\{h_A(x), h_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

- (β) Έστω A, B κλειστά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$. Αν $C = A \cap B$ αποδείξτε ότι

$$g_C(x) = \max\{g_A(x), g_B(x)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Έστω $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή, θετικά ομογενής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α) $h'(u; u) = h(u)$ και $h'(u; -u) = -h(u)$,

(β) $h'(u; y) \leq h(y)$,

όπου $h'(x; u)$ είναι η παράγωγος της f στο σημείο x στην κατεύθυνση του u .

6. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Το υποδιαφορικό της f στο x είναι το σύνολο

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}^n\}.$$

- (α) Αποδείξτε ότι το $\partial f(x)$ είναι μη κενό, συμπαγές και κυρτό.

- (β) Αποδείξτε ότι

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u \rangle \leq f'(x; u) \text{ για κάθε } u \neq 0\},$$

όπου $f'(x; u)$ είναι η παράγωγος της f στο σημείο x στην κατεύθυνση του u .

- (γ) Αποδείξτε ότι: αν η f είναι διαφορίσιμη στο x τότε $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

7. (α) Έστω A κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Αν A° είναι το πολικό σώμα του A , αποδείξτε ότι

$$|A^\circ| = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-h_A(x)} dx.$$

(β) Έστω A, B κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους. Αν $0 < t < 1$, αποδείξτε ότι

$$|((1-t)A + tB)^\circ| \leq |A^\circ|^{1-t} |B^\circ|^t.$$

8. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι το $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ακραίο σημείο του $\text{conv}(A)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \notin \text{conv}(A \setminus \{x\})$.

9. Έστω C μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι $\text{ext}(C) \neq \emptyset$ αν και μόνο αν το C δεν περιέχει καμία ευθεία.

10. Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι

$$\text{ext}(\text{conv}(S)) \subseteq S.$$