

ΠΡΟΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗ II ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ
28/4/2025

Άσκηση 1. (0.6× 5= 3 μον) Επιλέξτε την σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας:

1. Η σειρά $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ (α) συγκλίνει στο 2 (β) συγκλίνει στο 1 (γ) αποκλίνει στο $+\infty$.
2. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}$ (α) συγκλίνει στο $\sin 1$ (β) συγκλίνει στο $(\sqrt{e})^{-1}$ (γ) αποκλίνει στο $+\infty$.
3. Αν $0 < a_n < n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ (α) συγκλίνει (β) αποκλίνει (γ) δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν συγκλίνει ή όχι.
4. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (α) αποκλίνει στο $+\infty$, (β) συγκλίνει (γ) ταλαντώνεται.
5. Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = 2$ και αποκλίνει για $x = -2$. Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς τότε (α) $R < 2$ (β) $R = 2$ (γ) $R > 2$.

Λύση.

1. Η σειρά $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ (β) συγκλίνει στο 1, αφού $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.
2. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}$ (β) συγκλίνει στο $(\sqrt{e})^{-1}$, αφού $(\sqrt{e})^{-1} = e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}$.
3. Αν $0 < a_n < n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ (β) αποκλίνει αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.
4. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (β) συγκλίνει αφού είναι εναλλάσσουσα και η ακολουθία $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ φθίνουσα και μηδενική.
5. Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = 2$ και αποκλίνει για $x = -2$. Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς τότε (β) $R = 2$. Πράγματι αν $R < 2$ τότε η δυναμοσειρά δεν θα συνέκλινε στο $x = 2$ και αν $R > 2$ η δυναμοσειρά θα συνέκλινε στο $x = -2$.

Άσκηση 2. (2 μον) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Λύση. Έχουμε $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$, οπότε

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = 3 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\ &= 3 \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

και συνεπώς η σειρά αποκλίνει.

Άσκηση 3. (1× 4=4 μον) Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n} x^n$.

1. Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης R .
2. Εξετάστε την σύγκλιση στα σημεία $\pm R$ και βρείτε το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.
3. Βρείτε τον τύπο της $f'(x)$ (δίνεται ότι $1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}$ για κάθε $|t| < 1$).
4. Βρείτε τον τύπο της $f(x)$ και υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n}$.

Λύση. (1) Έχουμε $a_n = \frac{1}{4^n n}$ και άρα $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{4}$. Συνεπώς, η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1/\rho = 4$.

(2) Ελέγχουμε τώρα τη σύγκλιση στα σημεία -4 και 4 . Για $x = -4$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν συγκλίνει. Για $x = 4$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά που ως γνωστόν αποκλίνει.

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-4, 4)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(3) Από το Θεώρημα Παραγώγισης δυναμοσειράς, έχουμε $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{4^3} + \dots = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \dots \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{4}} = \frac{1}{4-x}$.

(β) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{4-t} dt \stackrel{u=4-t}{=} - \int_4^{4-x} \frac{1}{u} du = \ln 4 - \ln(4-x) = \ln \left(\frac{4}{4-x} \right)$$

Επειδή $f(0) = 0$, έχουμε $f(x) = \ln \left(\frac{4}{4-x} \right)$.

$$\text{Τέλος } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n} = f(1) = \ln \left(\frac{4}{4-1} \right) = \ln \left(\frac{4}{3} \right).$$

Άσκηση 4. (1×3=3 μον) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(α) Εξετάστε την f ως προς την συνέχεια στο $(0,0)$.

(β) Με χρήση του ορισμού της κατευθυνόμενης παραγώγου εξετάστε αν η f έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Λύση. (α) Για κάθε $(x, y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^4}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot x^2 + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot |y| \leq x^2 + |y|$$

Επειδή $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + |y|) = 0$, από τον κανόνα παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0,0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β) Από τον ορισμό της παραγώγου κατά κατεύθυνση έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^4 u_1^4 + t^3 u_2^3}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 u_1^4 + t^3 u_2^3}{t^3 u_1^2 + t^3 u_2^2} = \lim_{t \rightarrow 0} (tu_1^4 + u_2^3) = u_2^3$$

(γ) Από το (β) η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη: για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ παίρνουμε $f_x(0,0) = 0$ ενώ για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$ παίρνουμε $f_y(0,0) = 1$. Μπορούμε να συνεχίσουμε για να δούμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ με δύο τρόπους.

α' τρόπος: Γνωρίζουμε ότι αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$, τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u} = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = u_2$$

Άρα από το (β) θα είχαμε

$$u_2^3 = u_2 \Leftrightarrow u_2(u_2^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow u_2 = 0 \text{ ή } u_2 = \pm 1$$

που είναι αδύνατον να συμβαίνει για όλα τα $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ (πχ $u_1 = u_2 = 1/\sqrt{2}$).

β' τρόπος: Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Θέτοντας $f_x(0,0) = 0$ και $f_y(0,0) = 1$ έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2} - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

Όμως παίρνοντας το παραπάνω όριο πάνω στην ημιευθεία $x = y = t > 0$ έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 - t^3}{2^{3/2} t^3} = \frac{1}{\sqrt{8}} \lim_{t \rightarrow 0} (t - 1) = -\frac{1}{\sqrt{8}}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.