

Κυρτά Σύνολα

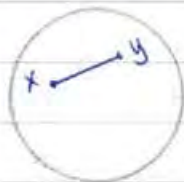
Συμβολισμός: Έστω $a, b \in \mathbb{R}^d$, τότε

- $[a, b] = \{ \lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0, 1] \} = \{ \lambda(a-b) + b \mid \lambda \in [0, 1] \}$
- $[a, b) = [a, b] \setminus \{b\} = \{ \lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0, 1] \}$

Ορισμός

Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^d$ λέγεται κυρτό αν για κάθε ζεύγος $x, y \in K \implies [x, y] \subseteq K$

Ισοδύναμος ορισμός
 K κυρτό $\iff$ το $\lambda x + (1-\lambda)y \in K \quad \forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$

Ορισμός

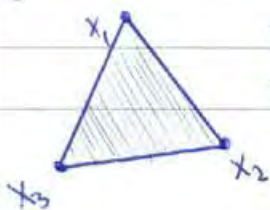
Έστω $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Κάθε συνδυασμός $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ με $\lambda_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ λέγεται κυρτός συνδυασμός.

π.χ. για $n=2$



οι κυρτοί συνδυασμοί είναι $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ όπου $\lambda \in [0, 1]$, και παριστάνει το ευθ. τμήμα $[x_1, x_2]$

για $n=3$ το $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ με $\lambda_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ παριστάνει κάθε σημείο του τριγώνου με κορυφές τα x_1, x_2, x_3 , μαζί με τα εσωτερικά του σημεία.



Πρόταση

Εστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$.

K κυρτό $\iff$ το K περιέχει κάθε κυρτό συνδυασμό σημείων του

$$\iff \forall x_1, \dots, x_n \in K \text{ και } \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ με } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \text{ τότε } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in K$$

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Για $n=2$ παίρνουμε τον ορισμό.

($\Rightarrow$) Με επαγωγή στο πλήθος των σημείων.
Εστω K κυρτό. Αν $n=2$ και $x_1, x_2 \in K$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ και $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, τότε από τον ορισμό της κυρτότητας $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2 \in K$

Εστω τώρα ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει για κάποιο n και $x_1, \dots, x_{n+1} \in K$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Τότε, αν $\lambda_{n+1} \neq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i}_{x} \cdot (1 - \lambda_{n+1}) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\triangleright 1 - \lambda_{n+1} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

$$\triangleright \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{n+1}} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = 1$$

$$\text{Αρα, } x = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i \in K$$

$$(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{n+1})x + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

και αφού $x, x_{n+1} \in K$ και $1 - \lambda_{n+1} + \lambda_{n+1} = 1$, έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in K.$$

Αν πάλι $\lambda_{n+1} = 1$, τότε πάλι $x = \sum_{i=1}^n 0 \cdot x_i + x_{n+1} = x_{n+1} \in K$

Πρόταση

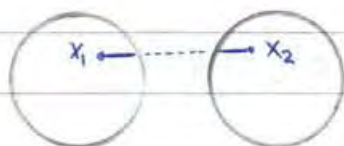
(1) Αν I ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\forall i \in I$ ισχύει $K_i \subseteq \mathbb{R}^d$ κυτό, τότε:

$$\bigcap_{i \in I} K_i \text{ κυτό}$$

(2) Αν $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \dots$ μία αύξουσα ακολουθία κυτών συνόλων στο $\mathbb{R}^d$, τότε

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \text{ κυτό}$$

Σχόλιο: Το (1) δεν ισχύει γενικά για ενώσεις.



Ισχύει όμως με τις υποθέσεις του (2).

Απόδειξη (1) (Με επιφύλαξη)

Έστω $x_1, x_2 \in \bigcap_{i \in I} K_i$, δηλαδή τα x_1, x_2 ανήκουν σε όλα τα K_i , $i \in I$.

Αρα αν $j \in I$, $x_1, x_2 \in K_j$ και K_j κυτό.

Οπότε, για $\lambda \in [0, 1]$ θα ισχύει $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in K_j$

Εφαρμόζοντας το ίδιο για κάθε $i \in I$ προκύπτει
 ότι $\bigcap_{i \in I} K_i$ κυρτό. ■

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \bigcap_{i \in I} K_i \text{ και άρα,}$$

Ορισμός

Εστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Κυρτή θήκη $\text{conv}(A)$ του A είναι η τομή όλων
 των κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ που περιέχουν
 το A .

$$\text{conv}(A) = \bigcap_{\substack{K \subseteq \mathbb{R}^d \\ A \subseteq K}} K$$

Το $\text{conv}(A)$ είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που
 περιέχει το A .

Απόδειξη (2)

Εστω $x, y \in \bigcup_n K_n$

Άρα $\exists i, j$ τέτοια ώστε $x \in K_i, y \in K_j$

$$\Rightarrow x, y \in K_{\max\{i, j\}}$$

$$\Rightarrow [x, y] \subseteq K_{\max\{i, j\}} \subseteq \bigcup_n K_n \quad \blacksquare$$

Πρόταση :

Εστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε
 $\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, x_i \in A, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}$

αποτελείται
 ακριβώς από τους
 κυρτούς συνδυασμούς
 του A

Απόδειξη



Εστω
$$C = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \geq 0, x_i \in A \\ n \in \mathbb{N}, \sum \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

$C \subseteq \text{conv} A$ Αν $x_1, \dots, x_n \in A \implies x_1, \dots, x_n \in \text{Conv}(A)$, διότι από τον ορισμό του $\text{Conv}(A)$ ισχύει ότι:

$$\text{conv}(A) = \bigcap_{\substack{K \subseteq \mathbb{R}^d \\ K \supseteq A}} K \stackrel{\text{περιέχει}}{\geq} A$$

Από το (1) της προηγούμενης Πρότασης ισχύει ότι $\text{conv}(A) = \bigcap_{\substack{K \subseteq \mathbb{R}^d \\ K \supseteq A}} K$ κυττό

Αρα οποιοσδήποτε κυττός συνδυασμός στοιχείων του $\text{conv}(A)$ θα περιέχεται στο $\text{conv}(A)$.

Δηλαδή, αν $x \in C$, όπου $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ με $x_i \in A$ τότε $x \in \text{conv}(A)$

Αρα $C \subseteq \text{Conv}(A)$.

$\text{Conv} A \subseteq C$ Ισχυρισμός: Το C είναι κυττό σύνολο.

Εστω $x, y \in C$, $v \in [0, 1]$, όπου:

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, \quad \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1$$

$$y = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m, \quad \mu_i \geq 0, \sum \mu_i = 1$$

Τότε,
$$vx + (1-v)y = v \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + (1-v) \sum_{i=1}^m \mu_i y_i \rightarrow$$

$$vx + (1-v)y = v\lambda_1 x_1 + \dots + v\lambda_n x_n + (1-v)\mu_1 y_1 + \dots + (1-v)\mu_m y_m,$$

το οποίο είναι κυττός συνδυασμός στοιχείων του A , αφού:

$$v\lambda_i \geq 0 \text{ και } (1-v)\mu_i \geq 0, \quad x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in A \text{ και } v \sum \lambda_i + (1-v) \sum \mu_i = v \cdot 1 + (1-v) \cdot 1 = 1$$

Οπότε $vx + (1-v)y \in C \implies C$ κυττό.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Επίσης } A \subseteq C \\ C \text{ κυττό} \end{array} \right\} \implies C \supseteq \bigcap_{\substack{K \subseteq \mathbb{R}^d \\ K \supseteq A \\ K \text{ κυττό}}} K = \text{conv} A$$

Βασικές κλάσεις κυρτών Συνόλων

1) Κυρτά σώματα

Κυρτά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με μη-κενό σύνολο εσωτερικών σημείων.

2) Κυρτά πολύτοπα

Κυρτές θήκες που παράχουν πεπερασμένα το πλήθος σημεία.
 $\text{conv}(x_1, \dots, x_n)$

3) Κυρτά πολύεδρα

Πεπερασμένες τομές ημιχώρων

$$\bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a_i, x \rangle \leq c_i\}, \text{ όπου } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d, c_i \in \mathbb{R}$$

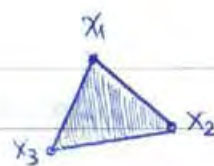
Παρακάτω θα δείξουμε ότι κάθε κυρτό πολύτοπο είναι κυρτό πολύεδρο.

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

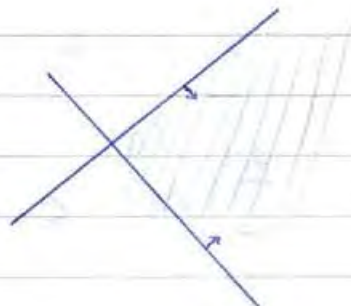
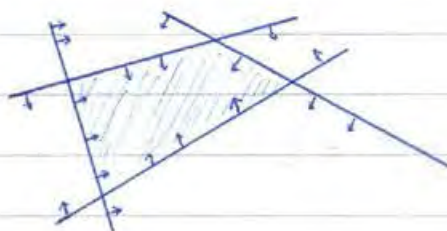
Παραδείγματα

- ▶ Στον $\mathbb{R}^2$ ένα ευθύγραμμο τμήμα $[a, b]$ είναι συμπαχές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, όμως το σύνολο των εσωτερικών σημείων είναι κενό.
- ▶ Ο κλειστός δίσκος στον $\mathbb{R}^2$ είναι κυρτό σώμα, τις ικανοποιεί και τις 3 συνθήκες.
- ▶ Ο κλειστός δίσκος στον $\mathbb{R}^3$ δεν είναι κυρτό σώμα αφού πάλι το σύνολο των εσωτερικών σημείων είναι το κενό σύνολο.

- Το τρίγωνο με κορυφές x_1, x_2, x_3 είναι κυρτό πολύτοπο $\Rightarrow$ κυρτό πολύεδρο.



- κυρτά πολύεδρα



Ένα κυρτό πολύεδρο είναι πολύτοπο αν και μόνο αν είναι φραγμένο.

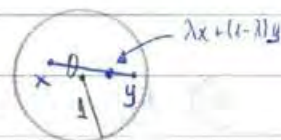
Παραδείγματα

- 1) Στο $\mathbb{R}$: τα κυρτά σύνολα είναι ακριβώς τα διαστήματα.

- 2) Η $B_2^d(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq 1\}$ είναι κυρτό στον $\mathbb{R}^d$.

Έστω $x, y \in B_2^d$. Τότε για $\lambda \in [0,1]$ έχουμε:

$$\| \lambda x + (1-\lambda)y \|_2 \stackrel{\text{τριγωνική ανισότητα}}{\leq} \lambda \|x\|_2 + (1-\lambda) \|y\|_2 \leq \lambda + 1-\lambda = 1$$



Τριγωνική Ανισότητα για την $\|\cdot\|_2$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i + y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2 + \sum_{i=1}^d y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^d x_i y_i}$$

C-S
 $\leq$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2 + \sum_{i=1}^d y_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{1/2}} = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{1/2}$$

Cauchy - Schwartz : $\sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{1/2}$

$|x_i y_i| \leq \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2) \leftarrow \text{προκύπτει από την } (a+b)^2 \geq 0$

Έστω $\sum_{i=1}^d x_i^2 = \sum_{i=1}^d y_i^2 = 1$ (x, y κανονικοποιημένα διανύσματα)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leq \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$

Αν x, y όχι κανονικοποιημένα, τότε θα ισχύει:

$\sum_{i=1}^d \frac{|x_i|}{\|x\|_2} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_2} \leq 1$ λόγω του προηγούμενου

$\frac{1}{\|x\|_2 \|y\|_2} \cdot \sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leq 1 \iff$

$\sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \iff$

$\sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{1/2}$

3) $B_1(0,1) = B_1^d = \{ x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1 \}$ είναι κυρτό

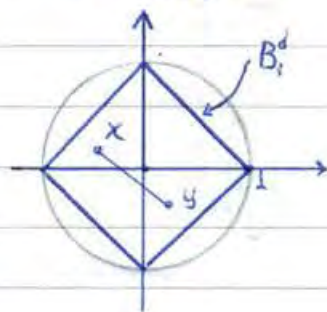
$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^d |x_i|$ είναι νόρμα.

(το δείχνουμε ομοίως)

Για $x, y \in B_1(0,1)$ και $\lambda \in [0,1]$

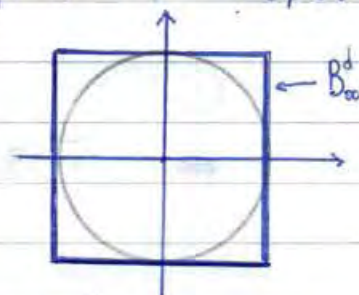
$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|_1 = \sum_{i=1}^d |\lambda x_i + (1-\lambda)y_i| \leq$

$\leq \lambda \sum_{i=1}^d |x_i| + (1-\lambda) \sum_{i=1}^d |y_i| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$



Άσκηση

Δείξτε ότι $B_\infty^d(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \overbrace{\max_{1 \leq i \leq d} |x_i|}^{\|x\|_\infty} \leq 1\}$ κυρτό



Άσκηση

- $B_1^d(0,1) = \text{conv}\{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_d\}$
- $B_2^d(0,1) = \text{conv}(S^{d-1})$, όπου $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum x_i^2 = 1\}$
- $B_\infty^d = \text{conv}\{x \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| = 1 \ \forall i\}$

Κυρτό Συνδυασμό

Άσκηση

Εστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ γραμμική, τότε το $T(K)$ κυρτό.

[Δηλ. γραμμική εικόνα κυρτού είναι κυρτό]

Εστω $u, v \in T(K)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι αν $\lambda \in [0,1]$, τότε $\lambda u + (1-\lambda)v \in T(K)$.

Αφού $u, v \in T(K)$, τότε $\exists x, y \in K : T(x) = u, T(y) = v$.
Παίρνουμε τον κυρτό συνδυασμό:

$$\begin{aligned} \lambda u + (1-\lambda)v &= \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y) \\ &= T(\lambda x + (1-\lambda)y) \end{aligned}$$

T γραμμική
↓
=

Όπως $x, y \in K$ και K κυρτό $\implies \lambda x + (1-\lambda)y \in K$

Άρα $\lambda u + (1-\lambda)v = T(\lambda x + (1-\lambda)y) \in T(K)$
Άρα $T(K)$ κυρτό. ■

Σχόλιο Το ίδιο ισχύει και για αφινικές απεικονίσεις.

$T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ γραμ., $g = T + a$, $a \in \mathbb{R}^d$, K κυρτό $\implies T(K)$ κυρτό.

Πόρισμα

Κάθε ελλειψοειδές είναι κυρτό σύνολο.

$\forall$ ελλειψοειδές E , $\exists$ γραμμική/αφινική $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
με $T(B_2^d) = E$

(αναλόγως αν έχω
κέντρο στο 0 ή όχι)

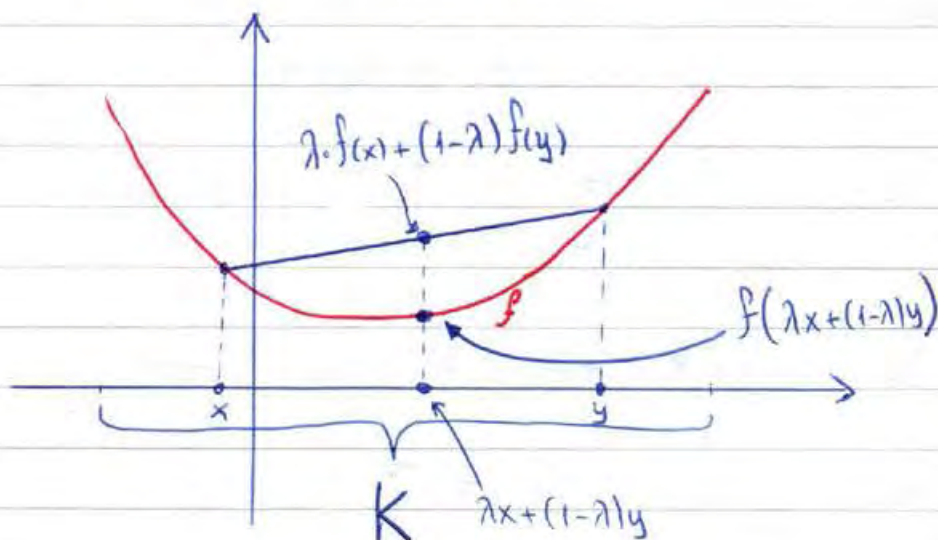
Κυρτές Συναρτήσεις

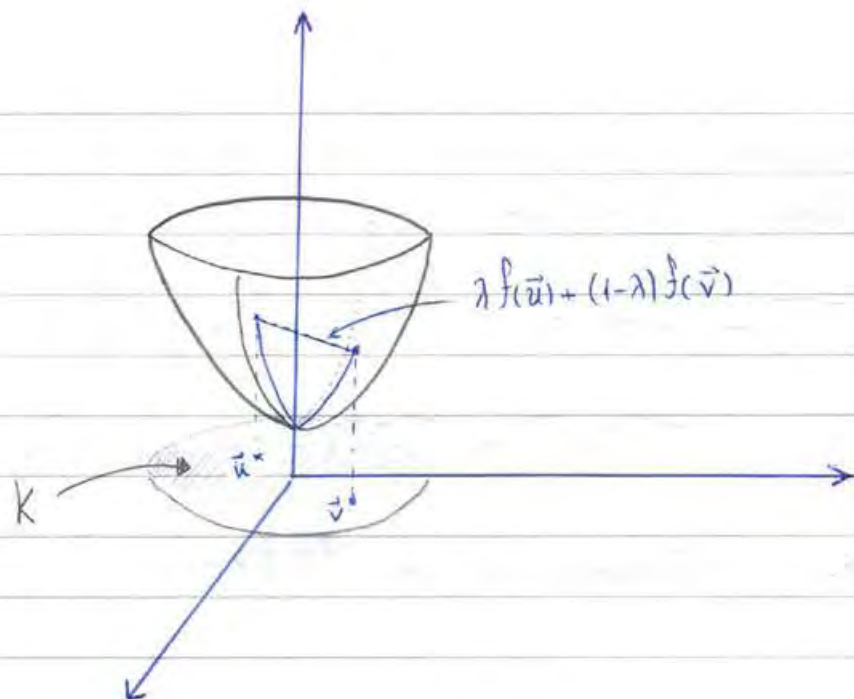
Ορισμός

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό. Τότε:

f κυρτή $\iff \forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$ τότε
 $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

f κοίλη $\iff -f$ κυρτή





Πρόταση

Αν $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ με $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό. Τότε
 f κυρτή $\iff f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$
 $\forall x_1, \dots, x_n \in K, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

Ανισότητα
Jensen

η απόδειξη είναι παρόμοια με τα σύνολα.

Εφαρμογή

Έστω X τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με πεπερασμένο το πλήθος τιμών ($X(\Omega)$ πεπερασμένο σύνολο). Θεωρούμε:
 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή, K κυρτό με $X(\Omega) \subseteq K$.

$$E[f(X)] = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot p_i \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} f\left(\sum_{i=1}^n x_i p_i\right) = f(E[X])$$

όπου $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$
 $p_i = P(X = x_i)$

$$\implies E[f(X)] \geq f(E[X])$$

π.χ. $E[X^2] \geq (E[X])^2$

$f: x \mapsto x^2$

Κανονικά η ανισότητα αυτή ισχύει και για μη-διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

$$E[X] = \int x p(x) dx, \quad E[f(x)] = \int f(x) \cdot p(x) dx$$

$$E[f(x)] \geq f(E[X]) \quad \text{για } f \text{ κυρτή.}$$

$$\Rightarrow \int f(x) p(x) dx \geq f\left(\int x p(x) dx\right)$$

Λήμμα των τριών χορδών

Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή και έστω $x, y, z \in I$ με $x < y < z$. Τότε:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \quad \left(\begin{array}{l} \text{σχέση για τις} \\ \text{κλίσεις} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

- απόδειξη -

Αν $x < y < z$, τότε

$$y = \lambda x + (1 - \lambda)z \quad \text{με} \quad \lambda \in (0, 1)$$

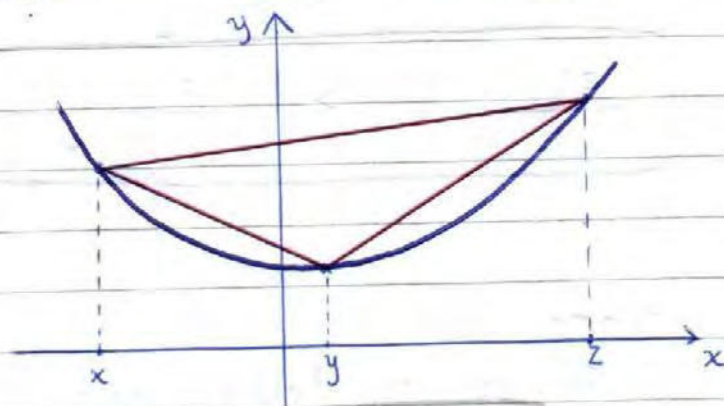
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{y - z}{x - z}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{z - y}{z - x}$$

$$\Rightarrow$$

$$1 - \lambda = \frac{y - x}{z - x}$$



Από f κυρτή έχουμε:

$$f(y) \leq \underbrace{\frac{z - y}{z - x}}_{\lambda} f(x) + \underbrace{\frac{y - x}{z - x}}_{1 - \lambda} f(z) \quad (*)$$

και αφού $f(x) = \frac{z - y}{z - x} f(x) + \frac{y - x}{z - x} f(x)$ αφαιρώντας με

$f(x)$ και τα δύο μέλη της (*) θα πάρουμε:

$$f(y) - f(x) \leq f(x) \left[\frac{z - y}{z - x} - \frac{z - y}{z - x} \right] + \frac{y - x}{z - x} [f(z) - f(x)] \quad \xrightarrow{y - x > 0}$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

← η πρώτη ανισότητα

Όμοιος, για την δεύτερη ανισότητα: $f(y) \leq \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$ (*)

$$f(z) = \frac{z-y}{z-x} f(z) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$$

Οπότε αφαιρώντας με $f(z)$ κατά μέλη από την (*) έχουμε:

$$f(y) - f(z) \leq \frac{z-y}{z-x} [f(x) - f(z)] + 0 \quad \stackrel{z-y > 0}{\Leftrightarrow} \cdot (-1)$$

$$\boxed{\frac{f(z) - f(y)}{z-y} \geq \frac{f(z) - f(x)}{z-x}} \quad \leftarrow \text{Η δεύτερη ανισότητα}$$

Άσκηση

Αποδείξτε ότι το Λήμμα ισχύει και αντιστρόφως. Δηλαδή, αν ισχύει η ανισότητα, τότε η f είναι κυρτή.

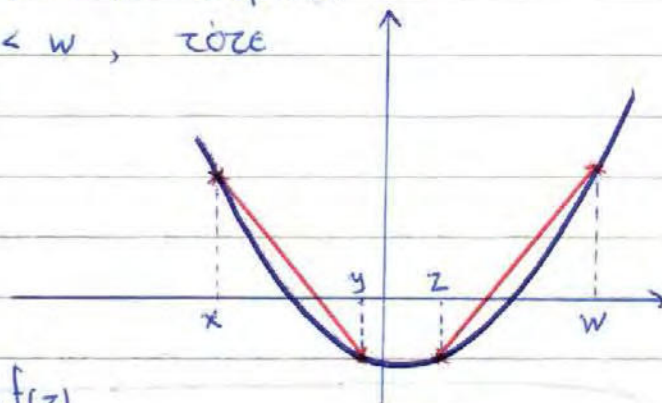
ΠΟΡΙΣΜΑ 1 [Λήμμα των δύο χορδών]

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή.

Αν $x, y, z, w \in I$ και $x < y < z < w$, τότε

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \frac{f(w) - f(z)}{w-z}$$

- απόδειξη -



$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z-y} \leq \frac{f(w) - f(z)}{w-z}$$

Λήμμα για
 x, y, z

Λήμμα για
 y, z, w

Πρόταση 2

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή.

Για κάθε $x \in I$ ορίζουμε συνάρτηση
οπου $g_x: I \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$g_x(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Τότε, η g_x είναι αύξουσα ως προς y , $\forall x \in I$.

- απόδειξη -

Έστω $x, y_1, y_2 \in I$ με $y_1 < y_2$ και $x \neq y_1, x \neq y_2$. Τότε, θα ισχύει ένα από τα εξής:

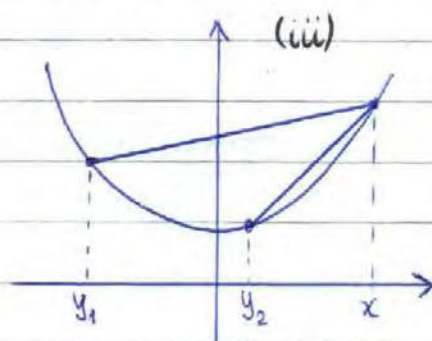
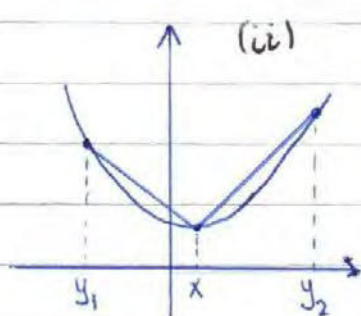
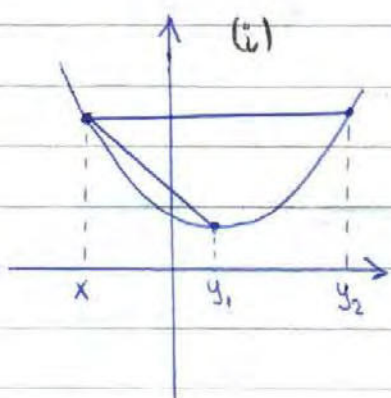
i) $x < y_1 < y_2$ ή ii) $y_1 < x < y_2$ ή iii) $y_1 < y_2 < x$

► Έστω $x < y_1 < y_2$, τότε από το Λήμμα 3-χορδών, θα έχουμε:

$$\frac{f(y_1) - f(x)}{y_1 - x} \leq \frac{f(y_2) - f(x)}{y_2 - x} \iff g_x(y_1) \leq g_x(y_2)$$

Άρα η g_x αύξουσα στο $I \setminus \{x\}$ ως προς y

► Οι ίδιοι λόγοι προκύπτουν και για τις περιπτώσεις (ii) και (iii)



Ορισμός

$I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Η f είναι Lipschitz αν υπάρχει $M \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε
 $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in I$ με $x \neq y$, ισοδύναμα αν

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < +\infty$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή. Τότε:

- (1) για κάθε $[c, d] \subseteq I$ η f είναι Lipschitz
- (2) η f είναι συνεχής στο I .

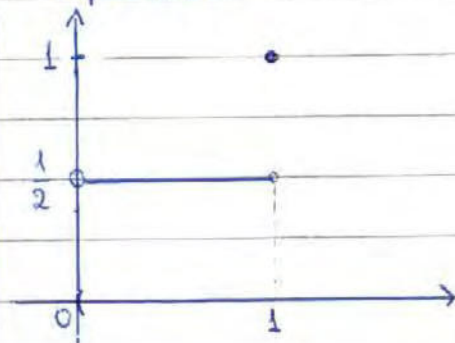
Απόδειξη (2)

Έστω $x \in I$, αφού I ανοιχτό υπάρχουν $c, d \in I$ zw. $c < x < d$.

Η f είναι Lipschitz στο $[c, d]$ από το (1)

Αρα η f είναι συνεχής στο $[c, d]$

Από x τυχαίο, έπεται ότι η f είναι συνεχής στο I .



Αν το I δεν είναι ανοιχτό τότε για f κυρτή, μπορεί να μην είναι συνεχής.

$$\begin{cases} \text{π.χ. } f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 1/2 \text{ για } 0 < x < 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Απόδειξη (1)

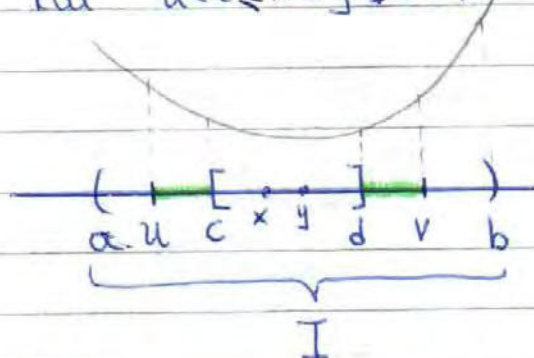
Έστω $[c, d] \subseteq I$ υπάρχουν $u, v \in I$, αφού I ανοιχτό,

τέτοια ώστε $u < c < d < v$

και έστω x, y τέτοια ώστε $x < y$ και $u < c \leq x < y \leq d < v$

Από τα προηγούμενα λήπουμε:

$$\frac{f(c) - f(u)}{c - u} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(v) - f(d)}{v - d}$$



$$\text{Αρα, } \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{f(c) - f(u)}{c - u} \right|, \left| \frac{f(v) - f(d)}{v - d} \right| \right\} := M$$

$$\text{Αρα, } \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in [c, d]}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq M < +\infty$$

Αρα, η f είναι Lipschitz στο $[c, d]$.

Σχόλιο Η σταθερά Lipschitz (M) αλλάζει για διαφορετικό κλειστό διάστημα στο I . Όσο πιο πολύ πλησιάζω τα άκρα η σταθερά M μεγαλώνει.

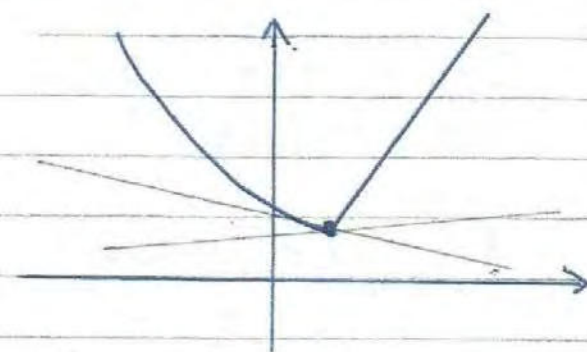
Ορισμός [Ευθεία στήριξης]

Εστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in I$.

Λέμε ότι η ευθεία $y = u_{x_0}(x - x_0) + f(x_0)$ είναι ευθεία στήριξης για την f στο x_0 αν ισχύει η ανισότητα

$$f(x) \geq u_{x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

για κάθε $x \in I$



Δύο ευθείες στήριξης σε σημείο x_0 , όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη

ΘΕΩΡΗΜΑ

Εστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Η f είναι κυρτή ανν έχει ευθεία στήριξης σε κάθε σημείο του γραφήματός της.

- απόδειξη -

Εστω $x \in I$. Τα όρια :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &= f'_+(x) \\ \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &= f'_-(x) \end{aligned} \right\} \text{υπάρχουν λόγω των προηγούμενων}$$

$$f'_+(x) = \inf \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} : y > x, y \in I \right\}$$

$$f'_-(x) = \sup \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} : y < x, y \in I \right\}$$

Τα σύνολα αυτά είναι μη κενά, επειδή υποθέτουμε ότι $x \in I$ και I ανοιχτό.

Επίσης, το $\left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} : y > x, y \in I \right\}$ είναι κάτω φραγμένο

από το $\frac{f(v) - f(x)}{v - x}$ για οποιοδήποτε $v \in I$ με $v < x$

Όμοια, το άλλο σύνολο είναι άνω φραγμένο.

Έστω $y > x, y \in I$

$$f(y) - f(x) \geq f'_+(x) (y - x)$$

Αν $y < x$, τότε

$$f(y) - f(x) \geq f'_-(x) (y - x)$$

Επίσης, έχουμε ότι $f'_+(x) \geq f'_-(x)$

Πράγματι, αφού f κυρτή για $y < x < z$ έχουμε ότι

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

► Αν πάρω το όριο, καθώς το y αυξάνεται προς το x ($y \uparrow x$) τότε, παίρνω ότι

$$f'_-(x) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \quad \text{για κάθε } z > x, z \in I$$

► και αν πάρω $z \downarrow x$, τότε $f'_-(x) \leq f'_+(x)$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε $u \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$, τότε

$$f(y) - f(x) \geq u (y - x)$$

Δηλαδή, $\varepsilon: y = u(y - x_0) + f(x_0)$ ευθεία στήριξης
($\varepsilon: y \mapsto u(y - x) + f(x)$)

Αντιστρόφως, έστω $\forall x \in I$ υπάρχει ευθεία $h_x(y) = u_x(y-x) + f(x)$ που διέρχεται από το $(x, f(x))$, τέτοια ώστε $h_x(y) \leq f(y)$ για κάθε $y \in I$.

Για $y=x$, $h_x(y) = f(y)$

Άρα, $f(y) = \sup_{x \in I} h_x(y)$ και μάλιστα $= \max_{x \in I} h_x(y)$

Κάθε h_x είναι ευθεία, άρα είναι κυρτή συνάρτηση, έπεται ότι $\sup_{x \in I} h_x = f(y)$ είναι κυρτή $\left(\begin{array}{l} h_x \text{ είναι άνω} \\ \text{φρασμένο από} \\ \text{την } f \end{array} \right)$

ΛΗΜΜΑ Αν I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $h_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in A$ είναι κυρτές συναρτήσεις για κάθε $i \in A$ και αν το σύνολο $h_i(x)$ είναι άνω φρασμένο για κάθε $x \in I$, τότε
η $h(x) = \sup_{i \in A} h_i(x)$ είναι επίσης κυρτή

- απόδειξη -

Έστω $x, y \in I$, $\lambda \in [0, 1]$. Τότε, για κάθε $i \in A$

$$\begin{aligned} h_i(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda h_i(x) + (1-\lambda) h_i(y) \\ &\leq \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y) \end{aligned}$$

Από αυτό ισχύει για κάθε $i \in A$, ισχύει και για το $\sup$:

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = \sup_{i \in A} h_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, τότε:
 Η f είναι κυρτή ανν έχει φέρουσα ευθεία σε κάθε $x \in I$.

Εφαρμογή

Εστω $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας $p(x)$, δηλαδή $P(X \in (c, d)) = \int_c^d p(x) dx$.

Εστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα, τέτοιο ώστε $X(\Omega) \subseteq I$
 και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή.

Τότε, $f(E[X]) \leq E[f(X)]$ υπο την προϋπόθεση
 ότι οι μέσες τιμές υπάρχουν.

$$E[X] = \int x p(x) dx = x_0 \quad (*)$$

Η f έχει φέρουσα ευθεία στο x_0 , δηλαδή $\exists u \in \mathbb{R}$ τ.ω.
 $f(x) \geq u(x - x_0) + f(x_0) \quad \forall x \in I$.

$$\int_I f(x) p(x) dx \geq \int_I u(x - x_0) p(x) dx + f(x_0) \int_I p(x) dx$$

$$E[f(X)] \geq u \int_I x \cdot p(x) dx - u x_0 \int_I p(x) dx + f(x_0)$$

$$\stackrel{(*)}{=} u x_0 - u x_0 + f(x_0) = f(E[X])$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Τότε:

(1) Για κάθε $x \in I$, υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$g(x+) = \lim_{y \downarrow x} g(y)$$

$$g(x-) = \lim_{y \uparrow x} g(y)$$

και

$$g(x+) \geq g(x) \geq g(x-)$$

(2) Το σύνολο $\{x \in I : g(x+) > g(x-)\} = \{x \in I : g \text{ συνεχής στο } x_0\}$
και είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη του (1) $\lim_{y \downarrow x} g(y)$

Ισχυρισμός: $g(x+) = \inf \{g(y) : y \in I, y > x\}$

Το $\{g(y) : y > x, y \in I\}$ είναι μη κενό και κάτω φραχμένο από το $g(x)$.

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $y \in I$ με $y > x$ τ.ω.
 $g(y) < \inf \{g(y') : y' \in I, y' > x\} + \varepsilon$

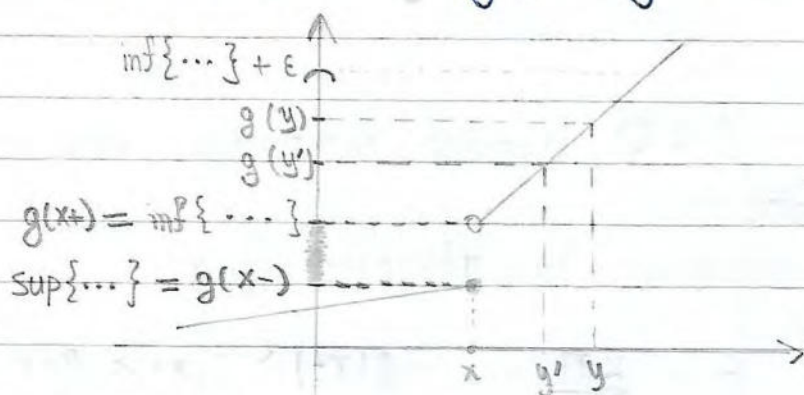
Τότε για κάθε $x < y' < y$ έχουμε ότι

- $g(y') \leq g(y) < \inf \{g(y'') : y'' \in I, y'' > x\} + \varepsilon$
- $g(y') \geq \inf \{g(y'') : y'' \in I, y'' > x\}$

Αυτό δείχνει ότι $\lim_{y \downarrow x} g(y) = \inf \{g(y) : y \in I, y > x\} = g(x+)$

Ομοια, $g(x-) = \sup \{g(y) : y < x, y \in I\}$

Επίσης, $\forall y > x, y \in I \quad g(x) \leq g(y) \implies g(x) \leq g(x+)$
 $\forall y < x, y \in I \quad g(y) \leq g(x) \implies g(x-) \leq g(x).$



Απόδειξη του (2)

Ορίζουμε $\forall x \in I$ $J_x = (g(x-), g(x+))$

Το παραπάνω σύνολο είναι μη-κενό, όταν η g είναι ασυνεχής στο x .

Τα διαστήματα αυτά είναι ζένα ανα δύο.

Εστω $x < u < y$, τότε
 $g(x+) \leq g(u) \leq g(y-)$, άρα $J_x \cap J_y = \emptyset$

Σε κάθε μη-κενό $J_x \neq \emptyset$ παίρνω έναν ρητό $q(x) \in J_x$

Τότε, $q: \{x \in I : J_x \neq \emptyset\} \rightarrow \mathbb{Q}$ είναι 1-1, διότι αν $x \neq y$, τότε $J_x \cap J_y = \emptyset$ και άρα $q(x) \neq q(y)$, επειδή $q(x) \in J_x$ και $q(y) \in J_y$

Άρα, $\{x \in I : J_x \neq \emptyset\}$ είναι αριθμήσιμο.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Εστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή. Τότε:

(1) τα όρια $f'_+(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ και $f'_-(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

υπάρχουν και $f'_+(x) \geq f'_-(x)$. Επιπλέον, για $x < y$, $x, y \in I$

έχουμε $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$

(2) η f'_- είναι συνεχής από αριστερά, και f'_+ συνεχής από δεξιά.

(3) η f είναι διαφορίσιμη σε ένα $x \in I$ ανν

η f'_- είναι συνεχής στο x ανν

η f'_+ είναι συνεχής στο x

(4) υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq I$, τέτοιο ώστε η $f'_+(x)$

υπάρχει $\forall x \in I \setminus A$ και f' είναι συνεχής στο $I \setminus A$.

$$g_x(x+) = f'_+(x) = \inf \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} : y \in (x, +\infty) \cap I \right\}$$

$$g_x(x-) = f'_-(x) = \sup \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} : y \in (-\infty, x) \cap I \right\}$$

► Απόδειξη του (1)

υπενθύμιση: f κυρτή $\Rightarrow \forall x \in I \quad g_x(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad y \neq x$

είναι αύξουσα

Όπως στην παρατήρηση τα όρια
 $g_x(x+) = \lim_{y \downarrow x} g(y) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ και

$g_x(x-) = \lim_{y \uparrow x} g(y) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ υπάρχουν και

$$g_x(x+) \geq g_x(x-)$$

Τότε $f'_+(x) = g_x(x+) \geq f'_-(x) = g_x(x-)$

Έστω $x, y \in I$ και $x < y$ και $x < u < v < y$. Τότε
 $\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(v)}{y - v}$ (από λήμμα 3 χορδών)

Παίρνουμε όριο καθώς $u \downarrow x$ $f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

παίρνουμε όριο καθώς $v \uparrow y$ $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y)$

Άρα, $f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y)$

► Απόδειξη του (2)

Λήμμα Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $h_n, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,
 h αύξουσα. — σημειακά αύξουσα ακολουθία

A) Αν $h_n(x) \leq h_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και $h_n(x) \rightarrow h(x) \quad \forall x \in I$
 και αν h_n είναι από αριστερά συνεχείς, τότε η h είναι
 από αριστερά συνεχής.

σημειακά φθίνουσα ακολουθία

B) Αν $h_n(x) \geq h_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και $h_n(x) \rightarrow h(x) \quad \forall x \in I$
και h_n είναι δεξιά συνεχείς, τότε και η h είναι
δεξιά συνεχής.

Απόδειξη του (A)

Πόση συνέχειας κατά σημείο

Έστω $x \in I$, και έστω $\varepsilon > 0$. $h_n(x) \uparrow h(x)$, και άρα
 $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $h_n(x) > h(x) - \frac{\varepsilon}{2}$

Πόση συνέχειας της h_n στο x από αριστερά

Υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. για $y \in I$ με $x - \delta < y < x$, να
ισχύει $h_n(y) > h_n(x) - \frac{\varepsilon}{2}$

Τότε, $\forall y \in (x - \delta, x) \cap I$, $h(y) \geq h_n(y) > h_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} > h(x) - \varepsilon$
και $h(y) \leq h(x) < h(x) + \varepsilon$.

Άρα, η h είναι από αριστερά συνεχής. ■

Η απόδειξη για το (B) είναι παρόμοια.

Απόδειξη του (2) ... συνέχεια

Ορίζουμε $h_n(x) = \frac{f(x - \frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}}$

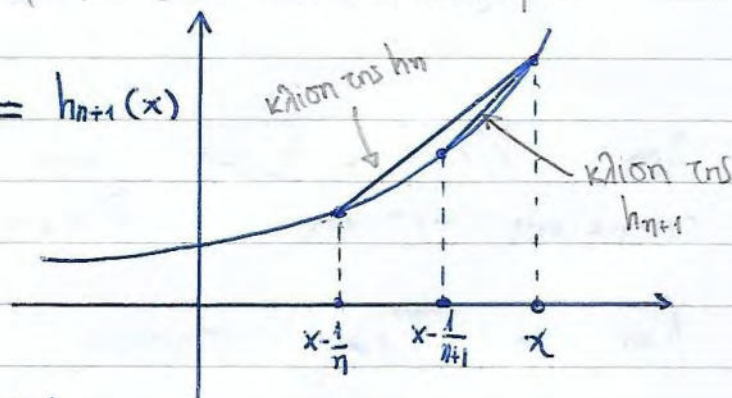
Κάθε h_n είναι συνεχής, γιατί η f είναι συνεχής, αφού η
 f κυρτή σε ανοιχτό διάστημα.

$$h_n(x) = \frac{f(x - \frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}} \leq \frac{f(x - \frac{1}{n+1}) - f(x)}{-\frac{1}{n+1}} = h_{n+1}(x)$$

Επίσης, $h_n(x) \rightarrow f'(x)$

Από το (1) επίσης η f' είναι αύξουσα

Από το Λήμμα (A) $\rightarrow$ η $f'(x)$ είναι
ένεται ότι από αριστερά συνεχής.



Παρόμοια, ορίζουμε $g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$

Κάθε g_n είναι συνεχής και $g_n(x) \rightarrow f'_+(x)$ και $g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z} \text{ και } \forall n \in \mathbb{N}$

Επίσης, από το (1) η f'_+ είναι αύξουσα

Αρα, $f'_+(x)$ είναι συνεχής από δεξιά.

Απόδειξη του (3)

$[\Rightarrow]$ Έστω $x \in I$ και έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x
Τότε, $f'_+(x) = f'_-(x)$

Έστω $y > x$
 $f'_-(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$
 $\downarrow \text{καθώς } y \downarrow x$
 $f'_+(x) = f'_-(x)$

Αρα, $\lim_{y \downarrow x} f'_-(y) = f'_-(x)$

Αρα, f'_- συνεχής από δεξιά στο x , αρα τελικά συνεχής.

$[\Leftarrow]$ Έστω $y > x$, $f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$
 $\downarrow \text{καθώς } y \downarrow x$
 $f'_-(x)$

Αρα, $f'_-(x) \geq f'_+(x)$ και επειδή ισχύει και το ανάποδο πάντα, επομένως τελικά $f'_-(x) = f'_+(x)$

Αρα, η $f'(x)$ υπάρχει.

Απόδειξη του (4)

$A = \{x \in I : f'_-(x+) > f'_-(x-)\}$. Το A είναι το σύνολο το οποίο η f'_- είναι ασυνεχής.

Το A είναι αριθμήσιμο. Για $x \in I \setminus A$ υπάρχει η $f'(x)$ επειδή η f'_- είναι συνεχής.

$f'|_{I \setminus A} = f'_-|_{I \setminus A}$ και η f'_- είναι συνεχής στο $I \setminus A$.

Άρα, η f' είναι συνεχής στο $I \setminus A$.

Πόρισμα Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή και διαφορίσιμη. Τότε:
Η f' είναι συνεχής, δηλ. $f \in C^1(I)$

- απόδειξη -

Το σύνολο $A = \{x \in I : f'_-(x+) > f'_-(x-)\}$ (βλέπε αποδ. του (4)) θα είναι κενό.

Πιο συγκεκριμένα, αφού $f'(x)$ υπάρχει έχουμε ότι f'_- συνεχής στο x , για κάθε $x \in I$. Όμως $f'(x) = f'_-(x)$ όταν η παράγωγος υπάρχει, άρα $f'(x) = f'_-(x) \quad \forall x \in I$.
Άρα, $f' = f'_-$ συνεχής.

Πρόταση Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Τότε, η f είναι κυρτή ανν η f' είναι αύξουσα.

- απόδειξη -

Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη και κυρτή και έστω $x, y \in I$ με $x < y$.

Αν $x < u < v < y$, τότε από Λήμμα 2 χορδών έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(y) - f(v)}{y - v}$$

Αν πάρουμε $\lim_{u \downarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = f'(x) \leq \frac{f(y) - f(v)}{y - v} \quad \forall \mu \in x < v < y$

Αρα, $f'(x) \leq \lim_{v \uparrow y} \frac{f(y) - f(v)}{y - v} = f'(y)$

Αρα, η f' είναι αύξουσα.

Αντίστροφα, έστω ότι f διαφορίσιμη και f' αύξουσα.
Έστω, επίσης, $x \in I$ και $y > x$.

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \quad \text{για κάποιο } x < \xi < y.$$

$$f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x) \geq f'(x) (y - x)$$

και για $y < x$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \quad \text{για κάποιο } y < \xi < x$$

$$f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x) \geq f'(x) (y - x) \quad \text{επειδή η } f' \text{ είναι αύξουσα και } y - x < 0$$

Αρα, $f(y) - f(x) \geq f'(x) (y - x) \quad \forall y$ και άρα η ευθεία $h(y) = f'(x) (y - x) + f(x)$ είναι φέρουσα ευθεία για την f στο x . Αρα η f έχει φέρουσα ευθεία σε κάθε $x \in I$ είναι κυρτή.

Παρατήρηση

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα, τότε η f είναι γνησίως κυρτή.

Πόρισμα

Αν $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$, τότε η f είναι κυρτή.

Παρατήρηση

Εστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα, τότε η f είναι γνησίως κυρτή.

Ειδικότερα, αν η f'' υπάρχει και $f'' > 0$, τότε η f είναι γνησίως κυρτή.

-απόδειξη-

Εστω $x, y \in I$ με $x \neq y$ και $\lambda \in (0, 1)$. Εστω $x < y$.
Απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε:

$$f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f'(\xi)(x-y)(1-\lambda) \quad (1) \text{ και}$$

$$f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f'(\zeta)\lambda(y-x) \quad (2)$$

$$\text{όπου } \begin{cases} \xi \in (x, \lambda x + (1-\lambda)y) \\ \zeta \in (\lambda x + (1-\lambda)y, y) \end{cases} \quad x < \xi < \lambda x + (1-\lambda)y < \zeta < y$$

πολ/ψω την (1) με λ και την (2) με $1-\lambda$ και τις προσθέτω:

$$\lambda \cdot f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{(1-\lambda)}_{>0} \underbrace{(y-x)}_{>0} [f'(\zeta) - f'(\xi)] > 0$$

Άρα, f γνησίως κυρτή.

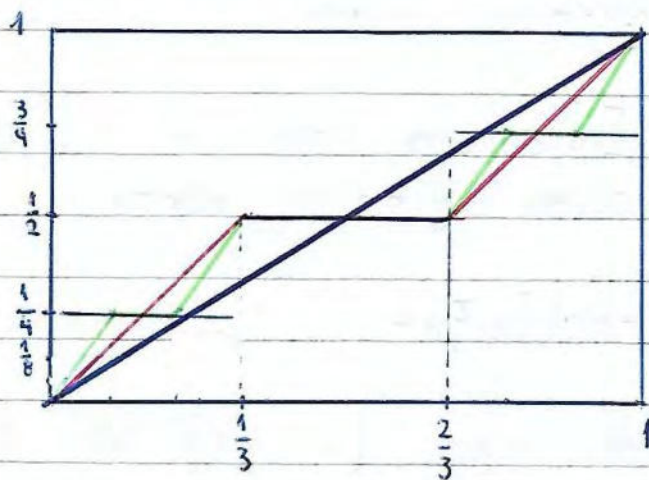
Σύμφωνα από το προηγούμενο μάθημα, για το αν υπάρχει αύξουσα συνάρτηση με αριθμησιμο πλήθος ασυνέχειας με το σύνολο αυτό να είναι πυκνό.

Η απάντηση είναι, ναι, υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση. Το παράδειγμα σερβίζεται στην συνάρτηση Cantor.

Είναι μια συνάρτηση αύξουσα και έχει πυκνό σύνολο σημείων ασυνέχειας.

Ορίζουμε $F_0(x) = x$, $x \in [0,1]$

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} F_n(3x) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & , \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} F_n(3x-2) + \frac{1}{2} & , \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |F_{n+1}(x) - F_n(x)| &\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [0,1]} |F_n(x) - F_{n-1}(x)| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \sup_{x \in [0,1]} |F_1(x) - F_0(x)| = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Αρα, η ακολουθία συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα Cauchy και άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή F .
Η F είναι αύξουσα.

Ορίζουμε $F^-(y) = \inf \{ x \in [0,1] : F(x) \geq y \}$ για $y \in [0,1]$.

Η F^- είναι αύξουσα, και είναι ασυνέχης σε κάθε δυαδικό ρητό $\frac{k}{2^n}$, όπου $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$

n.x. $F^{-}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{g}$, $a\lambda\lambda_a$ av $y > 1/4$ $F(y) \geq \frac{2}{L}$

Επειδή οι αριθμοί $\frac{k}{2^n}$, $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ είναι πυκνά στο $[0, 1]$
η F έχει πυκνό σύνολο ασυνεχειών. ■

κλείνει η παρένθεση αυτή και συνεχίζουμε με την κυριότητα.

ΛΗΜΜΑ [Anisótzeta Young]

$$A_v \quad x_1, \dots, x_n > 0, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1, \quad \text{zö22}$$

$$x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n. \quad (*)$$

- αποδείξει

Η προς απόδειξη ανισότητα (*) είναι ισοδύναμη με την :

$$\ln(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}) \leq \ln(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \iff \lambda_1 \ln x_1 + \cdots + \lambda_n \ln x_n \leq \ln(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)$$

Επειδή η $\ln$ έχει δεύτερη παράγωγο αρνητική, τότε η συνάρτηση $x \mapsto -\ln x$ είναι κυρτή.

Η προσ απόδειξη ανισότητα, είναι ανισότητα Jensen για την $-\ln$.

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow & \lambda_1 \cdot (-\ln x_1) + \dots + \lambda_n \cdot (-\ln x_n) \geq -\ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \\ & \lambda_1 \cdot f(x_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

Arvidenja Jensen.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1 Αν $x_1, \dots, x_n > 0$, τότε

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$$

[Ανισότητα
Αριθμητικού - Γεωμετρικού μέσου]

- αποδείξτε -

Εφαρμογή του Λήμματος για $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Για $x, y \geq 0$ και $p \geq 1$ και q τ.ω. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε

$$x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

- αποδείξτε -

► Για $x, y > 0$

$$\lambda_1 = \frac{1}{p}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{q} \quad \text{και} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{τότε}$$

$$x \cdot y = (x^p)^{1/p} (y^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

► Για $x=0$ ή $y=0$ ισχύει τετριμμένα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3 [Ανισότητα Holder]

Αν $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε

για $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}$$

(Παρατήρηση : Για $p=q=2$ η ανισότητα, αναφέρεται στην Cauchy-Schwarz.)

Έστω πρώτα ότι $\sum_{i=1}^n x_i^p = 1 = \sum_{i=1}^n y_i^q$

$$x_i y_i \leq \frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i y_i &\leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^n y_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Στην γενική περίπτωση, υποθέτουμε πρώτα ότι :

$$A = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \neq 0 \quad \text{και} \quad B = \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q} \neq 0$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα από πάνω, ειδική περίπτωση για τους αριθμούς

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{A} \quad \text{και} \quad \tilde{y}_i = \frac{y_i}{B} \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Έχουμε ότι $\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^p = \frac{1}{A^p} \sum_{i=1}^n x_i^p = 1$

$$\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i^q = \frac{1}{B^q} \sum_{i=1}^n y_i^q = 1$$

Άρα, συμπεραίνουμε ότι $\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{y}_i \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{A} \frac{y_i}{B} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq AB$$

Αν πάλι $A=0$, τότε πρέπει $x_i^p = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
 άρα, $x_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ και άρα το
 $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$ και ισχύει η ανισότητα τετριμένα.

Όμοια, αν $B=0$, τότε $\sum x_i y_i = 0$ πάλι.

Παρατήρηση 1 Για $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

Παρατήρηση 2

Για $p=1$ η ανισότητα ισχύει για $q = +\infty$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right) \cdot \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |y_i|$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 4 [Ανισότητα Minkowski]

Για $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{όταν } p \geq 1$$

- αποδείξει -

• Για $p=1$, είναι άμεσο από την τριγωνική ανισότητα

• Για $p > 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |y_i| \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \\ q = \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \\ (p-1)q = p \end{array} \right.$$

Αρα,

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1 - \frac{1}{p}} \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Αντα, αν $\sum |x_i + y_i|^p \neq 0$

Για $\sum |x_i + y_i|^p = 0$ η ισότητα ισχύει τετριμένα.

Πορίσμα

(1) Για κάθε $p \geq 1$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$ ορίζει νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

(2) $B_p^n = B_p(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ είναι κυρτό σύνολο για κάθε $p \geq 1$.

ΑΣΚΗΣΗ

Είναι η $\|\cdot\|_p$ νόρμα για $0 < p < 1$;

Είναι η B_p^n κυρτή για $0 < p < 1$;

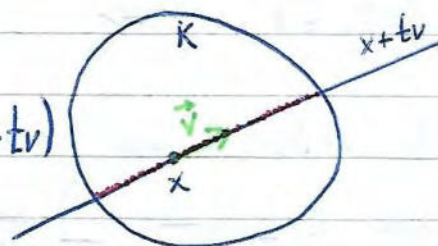
$$\left(B_1^n \subset B_p^n \subset B_\infty^n \quad \forall p \geq 1 \right)$$

Κυρτές Συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^d$

ΛΗΜΜΑ Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή. Τότε :

(1) Το σύνολο $I_{x,v} = \{t \in \mathbb{R} : x + tv \in K\}$ είναι κυρτό $\subseteq \mathbb{R}$,
(άρα διάστημα) $\forall x \in K$ και $v \in \mathbb{R}^d$

(2) Η συνάρτηση $g_{x,v}: I_{x,v} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g_{x,v}(t) = f(x + tv)$
είναι κυρτή $\forall x \in K$ και $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$



- απόδειξη (1) -

Έστω $t, s \in I_{x,v}$ και $\lambda \in [0, 1]$. Θέλουμε να δείξουμε ότι
 $\lambda t + (1-\lambda)s \in I_{x,v}$

$$\begin{aligned} x + [\lambda t + (1-\lambda)s]v &= \underbrace{\lambda x + \lambda vt}_{= \lambda(x+tv)} + \underbrace{(1-\lambda)x + (1-\lambda)s v}_{= (1-\lambda)(x+sv)} \\ &= \lambda(x+tv) + (1-\lambda)(x+sv) \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_K$

Αρα, αφού K κυρτό, τότε και ο κυρτός συνδυασμός
 $\lambda(x+tv) + (1-\lambda)(x+sv) \in K$.

Δηλαδή, πήραμε δύο αυθαίρετα $t, s \in I_{x,v}$ και δείξαμε
ότι $x + [\lambda t + (1-\lambda)s]v \in K$, δηλαδή $\lambda t + (1-\lambda)s \in I_{x,v}$.
Οπότε $I_{x,v}$ είναι κυρτό.

απόδειξη (2)

$$\begin{aligned} g_{x,v}(\lambda t + (1-\lambda)s) &= f(x + (\lambda t + (1-\lambda)s)v) \stackrel{(1)}{=} f(\lambda(x+tv) + (1-\lambda)(x+sv)) \\ &\leq \lambda f(x+tv) + (1-\lambda)f(x+sv) \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \lambda g_{x,v}(t) + (1-\lambda)g_{x,v}(s) \end{aligned}$$

f κυρτή

Παρατηρήσεις

1) $B_1(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq r\} = B_2(0, r)$

Αν $x \in B_1(0, r)$, τότε $\|x\|_1 \leq r \Leftrightarrow \frac{\|x\|_1}{r} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^d \frac{|x_i|}{r} \leq 1$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^d \frac{|x_i|^2}{r^2} \leq \sum_{i=1}^d \frac{|x_i|}{r} \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^d |x_i|^2 \leq r^2$

Αρα, $\|x\|_2 \leq r \Rightarrow x \in B_2(0, r)$

2) Στο $\mathbb{R}^d$, $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \sqrt{d}$

$$\sum_{i=1}^d |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^d 1^2 \right)^{1/2} = \|x\|_2 \sqrt{d}$$

3) $B_1(0, r) = \text{Conv}\{\pm re_1, \pm re_2, \dots, \pm re_d\}$

Ορισμός

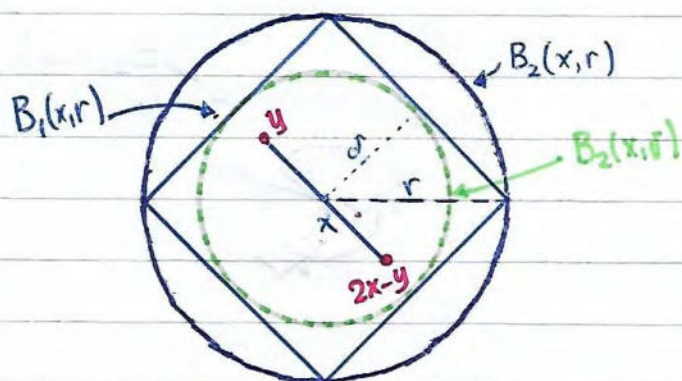
Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπικά Lipschitz αν για κάθε $x \in A$, $\exists r_x > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι Lipschitz στο σύνολο $A \cap B_2(x, r_x)$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό και κυρτό και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή

- (1) $H \upharpoonright f$ είναι τοπικά Lipschitz
- (2) $H \upharpoonright f$ είναι συνεχής
- (3) $H \upharpoonright f$ είναι Lipschitz σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του K .

- απόδειξη (1) -

Έστω $x \in K$. Υπάρχει $r > 0$ τω $B_2(x, r) \subseteq K$. Τότε,
 $B_1(x, r) = x + B_1(0, r) \subseteq x + B_2(0, r) = B_2(x, r)$



Για A, B :

$$A+B = \{x+y : x \in A, y \in B\}$$

$$x+A = \{x+y : y \in A\}$$

Όπως $B_1(x, r) = \text{Conv}\{x \pm re_1, \dots, x \pm re_d\} = \text{Conv}\{x_1, \dots, x_{2d}\}$

Για κάθε $y \in B_1(x, r)$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{2d} \in [0, 1]$
 με $\sum_{i=1}^{2d} \lambda_i = 1$ τέτοια ώστε:

- $x_1 = x + re_1$
- $x_2 = x - re_1$
- $x_3 = x + re_2$
- $x_4 = x - re_2$
- $\vdots$

$$y = \sum_{i=1}^{2d} \lambda_i x_i$$

και άρα $f(y) \leq \sum_{i=1}^{2d} \lambda_i f(x_i) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{2d} \lambda_i}_1 \cdot \max_{1 \leq i \leq 2d} |f(x_i)| := a$

Έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_2(x, \delta) \subseteq B_1(x, r)$ αρκεί $\delta \leq \frac{r}{\sqrt{d}}$
 Τότε,

$$f(y) \leq a \quad \forall y \in B_2(x, \delta)$$

Για $y \in B_2(x, \delta)$ θα έχει αντισυμμετρικό σημείο ως προς το x , που θα βρίσκεται και αυτό μέσα στο $B_2(x, \delta)$.

Συγκεκριμένα, αυτό θα είναι το $2x-y \in B_2(x, \delta)$, διότι:
 $\|2x-y - x\|_2 = \|x-y\|_2 \leq \delta$ και $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(2x-y)$.

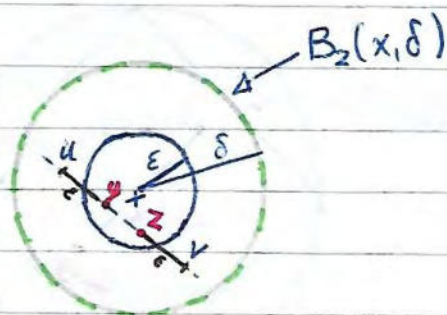
Απο κυρτότητα, $f(x) \leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(2x-y) \leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}a \implies$

$$f(y) \geq 2f(x) - a \geq -|2f(x) - a|$$

Άρα, για $y \in B_2(x, \delta)$ έχουμε ότι $|f(y)| \leq \underbrace{\max\{a, |2f(x) - a|\}}_{\substack{=: \\ \gamma}}$
(φράξαμε την f και από πάνω και από κάτω)

Έστω $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$

Έστω $y, z \in B_2(x, \varepsilon)$



$$u = y - \frac{\varepsilon}{\|y - z\|_2} (z - y)$$

$$v = z + \frac{\varepsilon}{\|y - z\|_2} (z - y) \stackrel{z = z - y + y}{=} y + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\|z - y\|_2}\right) (z - y)$$

Ορίσω $g(t) = f(y + t(z - y))$ (*) κυρτή

Θέλουμε να πούμε ότι $\frac{|f(y) - f(z)|}{\|y - z\|_2} \leq \frac{|f(v) - f(z)|}{\varepsilon}$

Έχουμε, $g(1) - g(0) \stackrel{(*)}{=} f(z) - f(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Λήμμα 3 χορδών}}}{\leq} \frac{g\left(1 + \frac{\varepsilon}{\|y - z\|_2}\right) - g(1)}{\frac{\varepsilon}{\|y - z\|_2}}$

$$= \frac{|f(v) - f(z)|}{\varepsilon} \|y - z\|_2 \leq \frac{|f(v)| + |f(z)|}{\varepsilon} \|y - z\|_2 \leq \frac{2\gamma}{\varepsilon} \|z - y\|_2$$

Πάλι από Λήμμα 3 χορδών :

$$g(1) - g(0) = f(z) - f(y) \geq \frac{g\left(\frac{-\varepsilon}{\|z - y\|_2}\right) - g(0)}{\frac{\varepsilon}{\|z - y\|_2}} = - \frac{|f(u)| - |f(y)|}{\varepsilon} \|z - y\|_2$$

$$\geq - \frac{2\gamma}{\varepsilon} \|z - y\|_2$$

Αρα, $|f(z) - f(y)| \leq \frac{2\delta}{\varepsilon} \|z - y\|_2$ για κάθε $z, y \in B_2(x, \varepsilon)$

- απόδειξη (2) -

Επειδή K ανοιχτό, αν $x \in K$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B_2(x, r) \subseteq K$ και η f να είναι Lipschitz στο $B_2(x, r)$ και άρα συνεχής στην $B_2(x, r)$ και άρα συνεχής στο x .

- απόδειξη (3) -

Εστω $C \subseteq K$ συμπαγές. Για κάθε $x \in C$, $\exists r_x > 0$ και $M_x \in (0, +\infty)$ τέτοια ώστε $|f(y) - f(z)| \leq M_x \|y - z\|$ $\forall z, y \in B_2(x, r_x)$.
Δηλαδή η f είναι Lipschitz στην $B_2(x, r_x)$ από (1)

Οι μπάλες $U_2(x, \frac{r_x}{2}) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_2 < \frac{r_x}{2}\}$, $x \in C$

αποτελούν ανοιχτό κάλυμμα του C , άρα υπάρχουν $x_1, \dots, x_N \in C$ τέτοια ώστε

$$C \subseteq U_2(x_1, \frac{r_{x_1}}{2}) \cup \dots \cup U_2(x_N, \frac{r_{x_N}}{2}) \subseteq B_2(x_1, \frac{r_{x_1}}{2}) \cup \dots \cup B_2(x_N, \frac{r_{x_N}}{2})$$

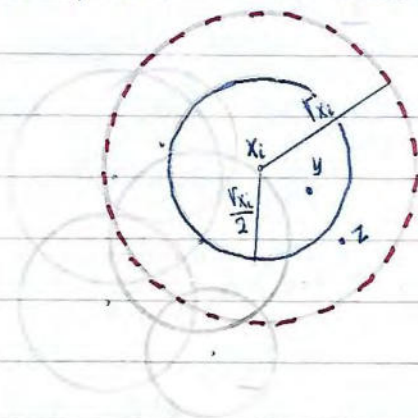
πεπερασμένο υποκάλυμμα

Εστω $y, z \in C$. $\triangleright$ Αν $\|y - z\|_2 \leq \frac{1}{2} \min\{r_{x_1}, \dots, r_{x_N}\}$:

Υπάρχει x_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ τέτοιο ώστε $y \in B_2(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})$ και επειδή $\|y - z\|_2 \leq r_{x_i}/2$ έχουμε ότι

$$\|z - x_i\|_2 \leq r_{x_i} \text{ και } z \in B_2(x_i, r_{x_i})$$

Αρα, $|f(z) - f(y)| \leq M_{x_i} \|z - y\|_2$



τριγωνική ανίσωση

$$\|z - x_i\|_2 = \|z - y + y - x_i\|_2 \leq \|z - y\|_2 + \|y - x_i\|_2 \leq \frac{r_{x_i}}{2} + \frac{r_{x_i}}{2} = r_{x_i}$$

► Αν $\|z-y\| > \frac{1}{2} \min\{r_{x_1}, \dots, r_{x_N}\} = \delta$, τότε

$$\begin{aligned} |f(z) - f(y)| &\leq 2 \sup_{w \in C} |f(w)| \\ &= \frac{2 \sup_{w \in C} |f(w)| \cdot \delta}{\delta} \end{aligned}$$

Σχόλιο: Ξέρουμε πλέον ότι η f είναι συνεχής στο (z) , άρα πάνω στο συμπαγές C θα είναι φραγμένη

$$\leq \frac{2 \sup_{w \in C} |f(w)|}{\delta} \|z-y\|_2$$

Ανλαδή, $|f(z) - f(y)| \leq M \|z-y\|_2 \quad \forall z, y \in C$, όπου
 $M = \max\{M_{x_1}, \dots, M_{x_N}, \frac{2 \sup_{w \in C} |f(w)|}{\delta}\} \in (0, +\infty)$

Άρα, η f είναι Lipschitz σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του C .

Αν $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, το σύνολο $u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$.

($x, y \in u^\perp, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y, u \rangle = \lambda \langle x, u \rangle + \mu \langle y, u \rangle = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in u^\perp$)

Ο $u^\perp$ έχει διάσταση $d-1$. Πράγματι, συμπληρώνουμε το u σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$ $u, u_1, \dots, u_{d-1}$. Τότε, τα $u_1, \dots, u_{d-1}$ είναι ορθοκανονική βάση του $u^\perp$.

$$\left(x = \langle x, u \rangle u + \sum_{i=1}^{d-1} \langle x, u_i \rangle u_i \right)$$

Το σύνολο $u^\perp$ είναι ένα υπερεπίπεδο.

Τα σύμπλοκα αυτού του γραμμικού χώρου
 $u^\perp + x = \{ y \in \mathbb{R}^d : \langle y, u \rangle = \langle x, u \rangle \}$ λέγονται
 υπερεπίπεδα: το $u^\perp + x$ είναι το υπερεπίπεδο
 κάθετο στο u που περιέχει το x .

► Ένα γενικό υπερεπίπεδο $H_{u,c} = \{ x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle = c \}$,
 $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$
 Αν $\|u\|_2 = 1$ και $c > 0$, το c είναι η απόσταση
 του υπερεπίπεδου από την αρχή των αξόνων.

► Κάθε υπερεπίπεδο, χωρίζει τον χώρο $\mathbb{R}^d$ σε δύο ημικύβους:
 $H_{u,c}^+ = \{ x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle \geq c \}$
 $H_{u,c}^- = \{ x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle \leq c \}$

Ορισμός [Αφφινική απεικόνιση]

Μια απεικόνιση $A: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται αφφινική αν
 είναι της μορφής

$$A(x) = T(x) + b$$

όπου $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική και $b \in \mathbb{R}^m$

• Ειδική περίπτωση $m=1$:

$$A(x) = \langle a, x \rangle + b, \quad b \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^d$$

Το γράφημα μιας τέτοιας είναι ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^{d+1}$

$$\text{Gr}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : y = A(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : \langle a, x \rangle - y = b\} = \{z \in \mathbb{R}^{d+1} : \langle z, \tilde{a} \rangle = b\}$$

$$\begin{array}{c} \in \mathbb{R}^d \\ \downarrow \\ \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{όπου } \tilde{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \\ -1 \end{pmatrix}, \quad z = (x, y)$$

$$y_2 = \langle y, u_2 \rangle = \langle x, u_2 \rangle = x_2 \Rightarrow$$

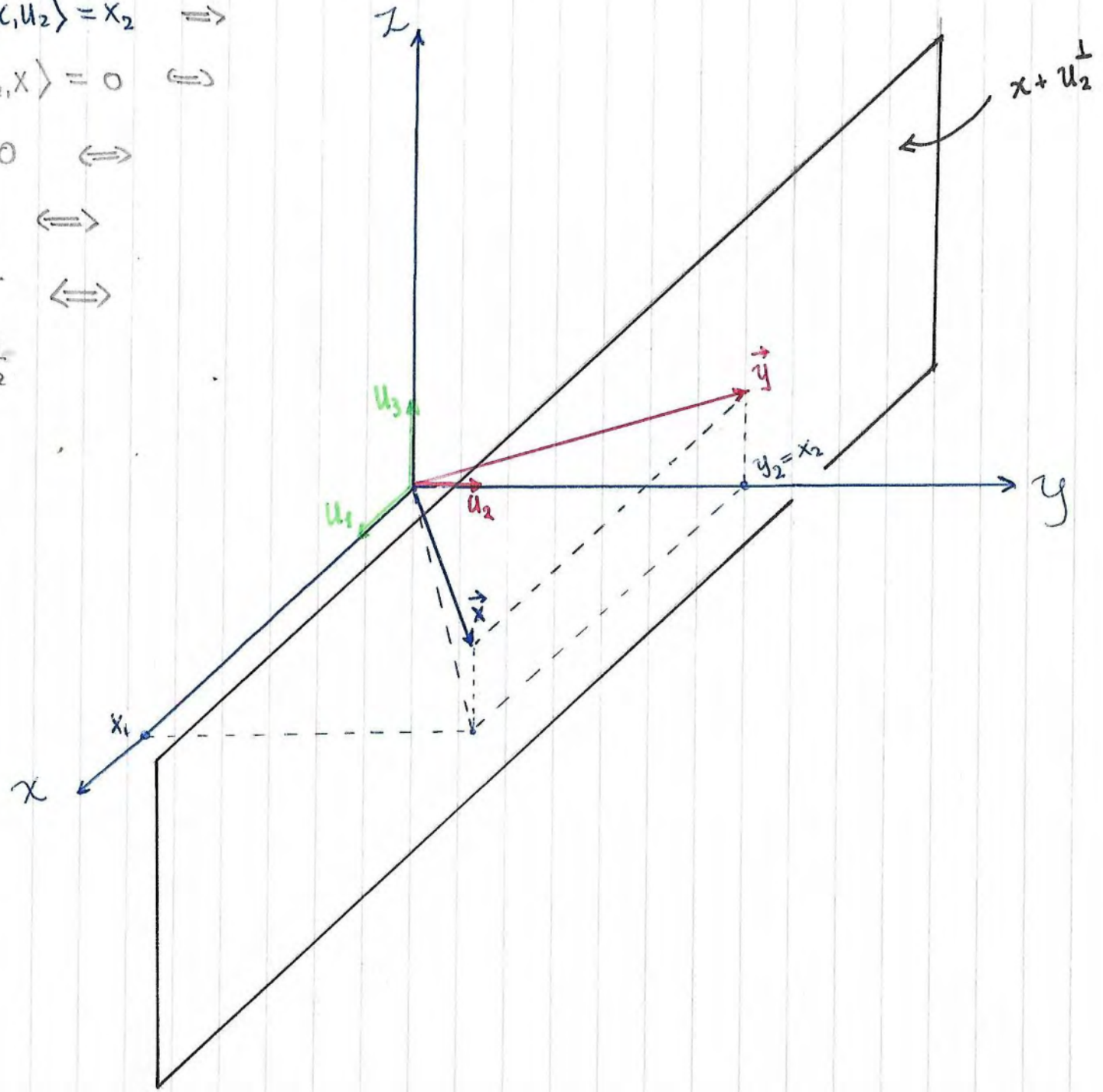
$$\langle u_2, y \rangle - \langle u_2, x \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle u_2, y - x \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$y - x \perp u_2 \Leftrightarrow$$

$$y - x \in u_2^\perp \Leftrightarrow$$

$$y \in x + u_2^\perp$$



ΟΡΙΣΜΟΣ [Συνάρτηση Στήριξης]

Έστω A ένα σύνολο, $(A \in \mathbb{R}^d)$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$
και θα λέμε ότι μία αφινική συνάρτηση της μορφής
 $A(x) = \langle a, x - x_0 \rangle + f(x_0)$, $x_0 \in A$ είναι συνάρτηση
στήριξης της f στο x_0 αν:
$$f(x) \geq A(x) \quad \forall x \in A$$

Στην περίπτωση αυτή, το γράφημα της f βρίσκεται
εξολοκλήρου σε έναν από τους δύο ημιχώρους στους
οποίους χωρίζει το γράφημα της A τον χώρο $\mathbb{R}^{d+1}$
και καλούμε το γράφημα της A , υπερεπίπεδο στήριξης της f
στο x_0 .

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $0 \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό και κυρτό.

Η $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή ανν

$\exists$ αφινική συνάρτηση $A_{x_0}(x) = \langle a, x - x_0 \rangle + f(x_0)$
για κάθε $x_0 \in K$, τέτοια ώστε:
$$f(x) \geq A_{x_0}(x) \quad \forall x \in K$$

Δηλαδή, η f είναι κυρτή ανν το γράφημά της έχει
υπερεπίπεδο στήριξης σε κάθε σημείο

ΘΕΩΡΗΜΑ :

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό και κυρτό και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$.
 Η f είναι κυρτή ανν
 το γράφημά της έχει σε κάθε σημείο της υπερεπίπεδο
 στήριξης.

$$\left[\text{Δηλαδή, } \forall x \in K \text{ υπάρχει } a_x \in \mathbb{R}^d, \text{ τέτοιο ώστε } \right. \\ \left. f(y) \geq \underbrace{\langle a_x, y-x \rangle + f(x)}_{A_x(y) : \text{αφρινική συνάρτηση}} \quad \forall y \in K \right]$$

Αρχικά, θα αποδείξουμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα

Έστω $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό και κυρτό, με $0 \in C$
 και $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση, με $g(0) = 0$.
 Έστω H_1 ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$ με
 $\dim H_1 < d$ τέτοιος ώστε να υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση
 $T_1: H_1 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T_1(x) \leq g(x) \quad \forall x \in H_1 \cap C$.
 Τότε:

υπάρχει γραμμικός υπόχωρος H_2 του $\mathbb{R}^d$ με $H_1 \subseteq H_2$
 και $\dim H_2 = \dim H_1 + 1$ και γραμμική συνάρτηση
 $T_2: H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $T_2|_{H_1} = T_1$ και
 $T_2(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in H_2 \cap C$.

- αποδείξη -

Αφού $\dim H_1 < d$, τότε $\exists z \in \mathbb{R}^d \setminus H_1$.
 (Μάλιστα, αν θέλουμε μπορούμε να πάρουμε το $z \in H_1^\perp$)

Θέτουμε $H_2 = \langle H_1 \cup \{z\} \rangle$

Κάθε διάνυσμα στον H_2 γράφεται ως $x + tz$, για κάποια μοναδικά $x \in H_1$ και $t \in \mathbb{R}$

(Μονοσημανता: αν $x + tz = x' + t'z$ τότε αν $t \neq t'$ τότε $z = \frac{x' - x}{t - t'} \in H_1 \leftarrow$ Αποπό
Αρα, $t = t'$ και τότε $x = x'$.)

Ορίζουμε $T_2 : H_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T_2(x + tz) = T_1(x) + tc$ για $x \in H_1$ και $t \in \mathbb{R}$, όπου το $c \in \mathbb{R}$ θα προσδιοριστεί.

Η T_2 είναι γραμμική:

$$\begin{aligned} T_2(a(x+tz) + b(y+sz)) &= T_2(ax+by + (at+bs)z) = \\ &= T_1(ax+by) + (ta+sb)c = \\ &= aT_1(x) + bT_1(y) + atc + bsc = \\ &= aT_2(x+tz) + bT_2(y+sz) \end{aligned}$$

H_1 γραμ. $\Rightarrow$ υπάρχουν $x, y \in H_1$ και $ax+by \in H_1$ και από το μονοσημαντο παραπάνω

$\leftarrow T_1$ γραμμική

Για $x \in H_1$ έχουμε $T_2(x) = T_1(x) + 0 \cdot c = T_1(x)$, άρα $T_2|_{H_1} = T_1$.

Για να ικανοποιείται η ανισότητα $g(x+tz) \geq T_2(x+tz)$ $\forall x+tz \in H_2$, πρέπει $g(x+tz) \geq T_1(x) + tc$ για κάθε $x \in H_1$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Ισοδύναμα, πρέπει:

$$c \leq \frac{g(x+tz) - T_1(x)}{t} \quad \forall x \in H_1, \quad \forall t > 0 \quad \text{και}$$

$$c \geq \frac{g(x+tz) - T_1(x)}{t} \quad \forall x \in H_1, \quad \forall t < 0$$

Τέτοιο c θα υπάρχει $\Leftrightarrow \frac{g(y-sz) - T_1(y)}{-s} \leq \frac{g(x+tz) - T_1(x)}{t} \quad \forall t, s > 0, \forall x, y \in H_1$

$$t [T_1(y) - g(y-sz)] \leq [g(x+tz) - T_1(x)] s \quad \forall x, y \in H_1, \forall t, s > 0$$

$$t T_1(y) + s T_1(x) \leq s g(x+tz) + t g(y-sz) \Leftrightarrow$$

$$\frac{t}{t+s} T_1(y) + \frac{s}{t+s} T_1(x) \leq \frac{s}{t+s} g(x+tz) + \frac{t}{t+s} g(y-sz) \Leftrightarrow$$

$$T_1\left(\frac{t}{t+s} y + \frac{s}{t+s} x\right) \leq \frac{s}{t+s} g(x+tz) + \frac{t}{t+s} g(y-sz)$$

Όμως, επειδή η g είναι κυρτή:

$$\begin{aligned} \frac{s}{t+s} g(x+tz) + \frac{t}{t+s} g(y-sz) &\geq g\left(\frac{s}{t+s} x + \frac{t}{t+s} z + \frac{t}{t+s} y - \frac{tsz}{t+s}\right) \\ &\geq T_1\left(\frac{s}{t+s} x + \frac{t}{t+s} y\right) \end{aligned}$$

επειδή $\frac{s}{t+s} x + \frac{t}{t+s} y \in H_1 \cap C$

Άρα, υπάρχει c ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα $T_2(y) \leq g(y) \quad \forall y \in H_2 \cap C$.

- απόδειξη θεωρήματος -

Έστω $x \in K$.

Ορίσουμε $C = K - x$ είναι κυρτό και περιέχει το 0.
 $K - x = \{y - x : y \in K\}$

Ορίσουμε $g(y) = f(x+y) - f(x)$, $y \in C$.

Τότε, η g είναι κυρτή και $g(0) = 0$.
Θεωρούμε την συνάρτηση $g_{0,e_1}(t) = g(0 + te_1)$

Γνωρίζουμε η g_{0,e_1} είναι κυρτή. Από το μονοδιάστατο
Θεώρημα υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $A_1(t) = a_1 \cdot t$
για t τέτοιο ώστε $te_1 \in C$ και η
 $g_{0,e_1}(t) = g(te_1) \geq A_1(t) \quad \forall$ τέτοιο t .

Θέτουμε $H_1 = \langle e_1 \rangle = \{te_1 : t \in \mathbb{R}\}$ και εφαρμόζουμε το Λήμμα.
Βρίσκουμε H_2 γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^d$ με $H_1 \subseteq H_2$ και
 $\dim H_2 = \dim H_1 + 1 = 2$ και γραμμική συνάρτηση
 $A_2 : H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(y) \geq A_2(y) \quad \forall y \in H_2 \cap C$

και συνεχίζουμε επαγωγικά. Βρίσκουμε τελικά γραμμικό υπόχωρο
 H_d του $\mathbb{R}^d$ με $\dim H_d = d$, άρα $H_d = \mathbb{R}^d$
και μια γραμμική απεικόνιση $A_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια
ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα
 $g(y) \geq A_d(y) \quad \forall y \in C \cap H_d = C$

Ισχυρισμός: Υπάρχει $a \in \mathbb{R}^d$ τ.ω. $A_d(y) = \langle a, y \rangle$

↳ απόδειξη

Έστω $a = (A_d(e_1), \dots, A_d(e_d))$

Πράγματι, τότε για $y = \sum_{i=1}^d y_i e_i \quad (y = (y_1, \dots, y_d))$

τότε

$$\langle a, y \rangle = \sum_{i=1}^d y_i \cdot A_d(e_i) \underset{\text{γραμμικότητα}}{=} A_d\left(\sum_{i=1}^d y_i e_i\right) = A_d(y)$$

Έχουμε $g(y) \geq A_d(y) \Leftrightarrow f(x+y) - f(x) \geq \langle a, y \rangle \quad \forall y \in C$
 $\Leftrightarrow f(z) \geq \langle a, z-x \rangle + f(x) \quad \forall z \in K. \quad \left(\begin{array}{l} z = x+y \\ y = z-x \end{array} \right)$

Κυρτότητα και Διαφορισιμότητα

Έστω $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό και $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

Η f είναι διαφορίσιμη στο $x \in U$ αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $Df(x): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{|f(x+y) - f(x) - Df(x)(y)|}{\|y\|_2} = 0$$

Η f έχει μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ στο x αν

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \text{για } i \in \{1, \dots, d\}$$

όταν το παραπάνω όριο υπάρχει

Αν μια f είναι διαφορίσιμη στο $x \in U$, τότε πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό:

$$\frac{|f(x + te_i) - f(x) - Df(x)(te_i)|}{|t|} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{\text{καθώς}} 0 \quad \begin{matrix} Df(x)(\cdot) \\ \text{γραμμική} \end{matrix} \iff$$

$$\left| \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} - Df(x)(e_i) \right| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

Αρα, υπάρχει $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ και ισούται με $Df(x)(e_i)$

Επομένως, η $Df(x)$ είναι και μονοσήμαντα ορισμένη

Αρα δηλαδή, αποδείξαμε ότι όταν μια πολυμεταβλητή συνάρτηση είναι διαφορίσιμη, τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοί της.

Θα αποδείξουμε μέσω αντιπαδείγματος ότι το αντίστροφο της τελευταίας πρότασης δεν ισχύει γενικά.

$$\text{Έστω} \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} & , \text{ αν } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ αν } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{Τότε,} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, 0) - f(0, 0)}{x_1} = 0$$

$$\text{Όμοια,} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$$

Όμως η f δεν είναι καν συνεχής στο $(0, 0)$:

$$f(x_1, \lambda x_1) = \frac{\lambda x_1^2}{x_1^2(1 + \lambda^2)} \xrightarrow{x_1 \rightarrow 0} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

Παρατηρούμε ότι το όριο στο $(0, 0)$ εξαρτάται από την τιμή του λ , δηλαδή από την κλίση της ευθείας με την οποία προσεγγίζουμε το $(0, 0)$.

Επομένως, το όριο $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} f(x_1, x_2)$ δεν υπάρχει.

Συνεπώς, αφού η f δεν είναι καν συνεχής στο $(0, 0)$ δεν μπορεί να είναι διαφορίσιμη.

Χρειαζόμαστε παραπάνω συνθήκες για να μπορέσουμε να ισχυριστούμε κάτι τέτοιο. Συγκεκριμένα, (υπενθύμηση από Απει. III) αν οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο που εξετάζουμε

Για κυρτές συναρτήσεις ορισμένες σε ανοικτά κυρτά σύνολα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και κυρτό, και συνάρτηση $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή, και έστω $x \in K$.
 $H \quad f \text{ είναι διαφορίσιμη στο } x \iff$
 $H \quad f \text{ έχει μερικές παραγώγους στο } x.$

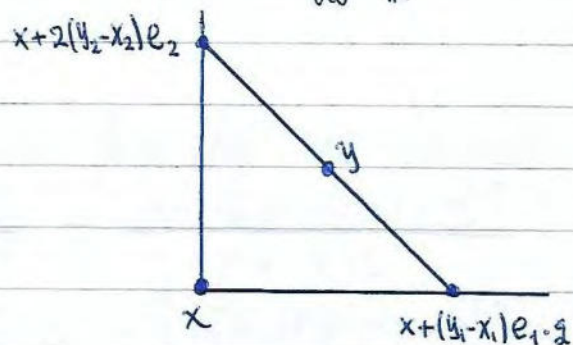
[Απόδειξη $\Rightarrow$] Η κατεύθυνση αυτή αποδείχτηκε στην αρχή του μαθήματος

[Απόδειξη $\Leftarrow$]

Έστω $x \in K$ και έστω ότι η f έχει μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ στο x .

Έστω $y \in K$.

$$y = x + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (y_i - x_i) e_i \quad (\text{ελέγχεται εύκολα})$$



Από κυρτότητα

$$f(y) \leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d f(x + (y_i - x_i) e_i) \quad \leftarrow x = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d x$$

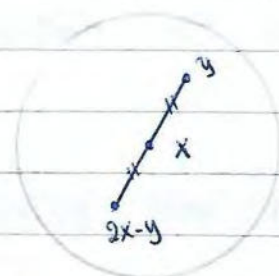
Κάνοντας το ίδιο για το

$$2x - y = x + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (x_i - y_i) e_i$$

χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της f

$$f(2x - y) \leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d f(x + (x_i - y_i) e_i)$$

$$x = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} (2x - y) \xrightarrow{f \text{ κυρτή}} f(x) \leq \frac{1}{2} f(y) + \frac{1}{2} f(2x - y)$$



$$\implies f(y) \geq 2f(x) - f(2x - y) \geq 2f(x) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d f(x + (x_i - y_i) e_i)$$

Σχηματίζουμε την ποσότητα:

$$f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y-x \rangle \leq$$

$$\leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left[f(x + (y_i - x_i) e_i) - f(x) - d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) (y_i - x_i) \right] \rightarrow$$

$$\frac{f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y-x \rangle}{\|y-x\|_2} \leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left[\frac{f(x + (y_i - x_i) e_i) - f(x)}{d(y_i - x_i)} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] \frac{d(y_i - x_i)}{\|y-x\|_2} \quad (I)$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την ανίσωση:

$$f(y) \geq 2f(x) - f(2x-y) \geq 2f(x) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d f(x + (x_i - y_i) e_i) \quad \text{θα έχουμε ότι:}$$

$$\frac{f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y-x \rangle}{\|y-x\|_2} \geq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left[\frac{-f(x) + f(x + (x_i - y_i) e_i)}{d(x_i - y_i)} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] \frac{d(y_i - x_i)}{\|y-x\|_2} \quad (II)$$

Έχουμε ότι για κάθε $i \in \{1, \dots, d\}$

$$\frac{f(x + (y_i - x_i) e_i) - f(x)}{d(y_i - x_i)} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{f(x + (x_i - y_i) e_i) - f(x)}{d(x_i - y_i)} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \rightarrow 0$$

και το πηλίκο $\frac{y_i - x_i}{\|y-x\|_2}$ είναι φραγμένο από 1.

Άρα από κριτήριο Παρεμβολής $\frac{f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y-x \rangle}{\|y-x\|_2} \rightarrow 0$

Αυτό δείχνει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x .

Θεώρημα Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και κυρτό, και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή. Έστω $x \in K$, τότε:

- Η f είναι διαφορίσιμη στο $x \iff$
- Το γράφημα της f έχει μοναδικό υπερεπίπεδο στήριξης στο $(x, f(x))$, δηλαδή $\iff$
- Το σύνολο $\partial f(x) = \{ u \in \mathbb{R}^d : f(y) \geq \langle u, y-x \rangle + f(x) \quad \forall y \in K \}$ είναι μονοσύνολο, και στην περίπτωση αυτή $\partial f(x) = \{ \nabla f(x) \}$

Ορολογία: Το $\partial f(x)$ λέγεται υποδιαφορικό της f στο x .

Παρατήρηση: Για $d=1$, $\partial f(x) = [f'_-(x), f'_+(x)]$

- απόδειξη ($d=1$) -

Επειδή η f είναι κυρτή $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'_+(x) \quad \forall y \in K \text{ με } y > x$

$\iff f(y)-f(x) \geq f'_+(x)(y-x) \geq u(y-x) \quad \forall y \in K, y > x \text{ για } u \leq f'_+(x)$

Όμοια $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(x) \quad \text{για } y < x, y \in K \quad \text{άρα}$

$f(y)-f(x) \geq f'_-(x)(y-x) \geq u(y-x) \quad \forall y \in K, y < x \text{ για } u \geq f'_-(x)$

Άρα αν $u \in [f'_-(x), f'_+(x)]$ τότε $\forall y \in K$
 $f(y)-f(x) \geq u(y-x) \iff f(y) \geq u(y-x) + f(x) \quad \forall y \in K$
 Άρα $u \in \partial f(x)$, δηλαδή $[f'_-(x), f'_+(x)] \subseteq \partial f(x)$

Αντίστροφα, έστω $u \in \partial f(x)$ τότε:
 $f(y)-f(x) \geq u(y-x) \quad \forall y \in K.$

υπενθ $f'_-(x) = \sup \left\{ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, y \in K, y < x \right\}$

υπενθ: $f'_+(x) = \inf \left\{ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, y \in K, y > x \right\}$

Για $y \in K, y > x$ τότε $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq u \xrightarrow[\text{από κατά φράση}]{y \downarrow x} f'_+(x) \geq u$

Για $y \in K, y < x$ τότε $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq u \xrightarrow[\text{ένα ανω φράγμα}]{y \uparrow x} f'_-(x) \leq u$

Άρα $\partial f(x) \subseteq [f'_-(x), f'_+(x)]$

Άρα καταλήγουμε ότι $[f'_-(x), f'_+(x)] = \partial f(x)$ και αν η f είναι διαφορίσιμη στο x τότε $f'_-(x) = f'_+(x)$ και τότε $\partial f(x) = \{f'(x)\}$

- αποδείξη - [στην γενική περίπτωση του θεωρήματος]

Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $x \in K$.

Έστω $u \in \partial f(x)$.

Δηλαδή, $f(y) - f(x) \geq \langle u, y-x \rangle \quad \forall y \in K$.

Αν πάρω ένα y της μορφής $y = x + t e_i$, τότε $f(x + t e_i) - f(x) \geq \langle u, t e_i \rangle = t u_i \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$

και για όλα τα t σε ένα αρκούντως μικρό διάστημα γύρω από το 0. ($\{t \in \mathbb{R} : x + t e_i \in B_2(x, \delta)\}$, όπου $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η $B_2(x, \delta)$ να περιέχεται στο K)

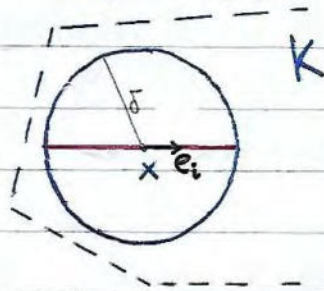
Άρα $\frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} \geq u_i$ για $t > 0$

Άρα $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geq u_i$

Επίσης, για $t < 0$ $\frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} \leq u_i$

Άρα $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \leq u_i$

Άρα $u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$



Επεται ότι $u = \nabla f(x)$. Δηλαδή $\partial f(x) \subseteq \{\nabla f(x)\}$

ΥΠΕΡΕΓΓΙΣΗ ΛΗΜΜΑ: Έστω $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό κ' κυρτό
τέτοιο ώστε $0 \in C$. Έστω $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή με $g(0) = 0$.
Έστω ότι $H_1 \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$
με $\dim H_1 < d$ και τ.ω. υπάρχει γραμμική απεικόνιση
 $A_1: H_1 \rightarrow \mathbb{R}$ τ.ω. $g(x) \geq A_1(x) \quad \forall x \in H_1 \cap C$.
Τότε:

υπάρχει υπόχωρος $H_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\dim H_2 = \dim H_1 + 1$ και
με $H_1 \subseteq H_2$ και γραμμική επέκταση $A_2: H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ της
 A_1 τέτοια ώστε $g(x) \geq A_2(x) \quad \forall x \in H_2 \cap C$.

Έστω ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο x .
Υπάρχει $i \in \{1, \dots, d\}$ τ.ω. $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^+(x) > \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^-(x)$

Δηλαδή ορίζουμε $h(t) = f(x + te_i)$, για t τ.ω.
 $x + te_i \in K$

$$h'_+(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^+(x) \quad \text{και} \quad h'_-(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^-(x)$$

Άρα υπάρχουν $u_i, v_i \in [h'_-(0), h'_+(0)]$ με $u_i \neq v_i$
Τότε έχουμε από την παρατήρηση
 $h(t) \geq u_i t + f(x)$ και $h(t) \geq v_i t + f(x)$
 $f(x + te_i) \geq u_i t + f(x)$ και $f(x + te_i) \geq v_i t + f(x)$
 $\forall t$ τ.ω. $x + te_i \in K$.

Ορίζουμε $C = K - x = \{y - x : y \in K\}$, τότε $0 \in C$ και
 C ανοικτό και κυρτό.

Ορίζουμε $g: C \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = f(x+y) - f(x)$, $y \in C$

$g(0) = 0$ και η g είναι κυρτή.

Επίσης, για τις συναρτήσεις $A_i(t e_i) = u_i t$, $B_i(t e_i) = v_i t$
αυτές είναι γραμμικές απεικονίσεις ορισμένες στον υπόχωρο
 $H_1 = \langle e_i \rangle$ και $A_i(y) \leq g(y)$ και $B_i(y) \leq g(y) \quad \forall y \in C \cap H_1$

Απο το Λήμμα, κάθε μία από τις A_i, B_i επεκτείνεται σε γραμμική
απεικόνιση A, B αντίστοιχα σε όλο το $\mathbb{R}^d$ και τέτοιες ώστε
 $g(y) \geq A(y)$ και $g(y) \geq B(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d \cap C = C$

Οι A, B είναι διαφορετικές, δηλαδή $A \neq B$, γιατί ήδη στον H_1
είχαμε:

$A(t e_i) = A_i(t e_i) = u_i t \neq v_i t = B_i(t e_i) = B(t e_i)$ για $t \neq 0$,
αφού $u_i \neq v_i$.

Γνωρίζουμε ότι: $A(y) = \langle u, y \rangle$, $B(y) = \langle v, y \rangle$ με $u \neq v$, αφού
 $A \neq B$. Τότε:

$f(y) - f(x) = f(x + y - x) - f(x) = g(y - x) \geq A(y - x) = \langle u, y - x \rangle$
και όμοια $f(y) - f(x) \geq B(y - x) = \langle v, y - x \rangle \quad \forall y \in K$

Άρα $u \in \partial f(x)$. Επομένως αν $\partial f(x)$ είναι μονοσύνολο, τότε
έχουμε άτοπο ($u \neq v$).

Επεται ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x , όταν το $\partial f(x)$ είναι
μονοσύνολο. ■

Υπάρχουν $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι διαφορίσιμες, χωρίς οι μερικές τους
παράγωγοι να είναι συνεχείς. π.χ.:

$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$

Η f είναι διαφορίσιμη παντού, αλλά η f' δεν είναι συνεχής στο 0.
 $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \quad \leftarrow$ δεν έχει όριο στο 0.

π.χ. (για $d=2$) $f(x_1, x_2) = x_1^2 \sin \frac{1}{x_1} + x_2^2 \sin \frac{1}{x_2}$, $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$

και στα υπόλοιπα σημεία ορίζουμε την f ώστε να είναι συνεχής

Τότε η f έχει μερικές παραγώγους, αλλά αυτές δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$.

Επίσης η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

π.χ. $f(x) = \|x\|_2^2 \sin \frac{1}{\|x\|_2}$ για $x \neq (0, \dots, 0)$ κ' $f(0) = 0$.

Θεώρημα Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και κυρτό, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή.
Αν η f είναι διαφορίσιμη στο K , τότε είναι C^1 στο K ,
δηλαδή οι μερικές παράγωγοι της είναι συνεχείς.

- απόδειξη -

Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $x \in K$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο K
τ.ω. $x_n \rightarrow x$ τότε $\nabla f(x_n) \rightarrow \nabla f(x)$

Έστω λοιπόν $x \in K$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο K με $x_n \rightarrow x$.

Θα δείξουμε τα εξής:

(1) Η $(\nabla f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη

(2) Για κάθε υποκολουθία $(\nabla f(x_{k_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ της $(\nabla f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$
 $k_1 < k_2 < \dots < \dots$ η οποία συγκλίνει, το όριο είναι $\nabla f(x)$.

Λήμμα: Αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ φραγμένη, με την ιδιότητα
ότι όλα τα υποκολουθιακά της όρια είναι ίδια, α έστω,
τότε $a_n \rightarrow a$.

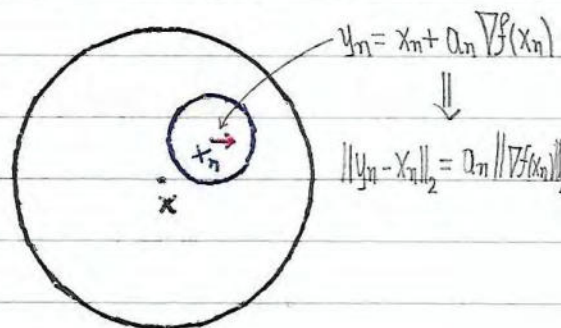
απόδειξη (1): Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $r_x > 0$ κ' $M_x \in (0, +\infty)$ τ.ω.
 $B_2(x, r_x) \subseteq K$ και $|f(y) - f(z)| \leq M_x \|y - z\|_2 \quad \forall y, z \in B_2(x, r_x)$
επειδή η f είναι κυρτή και άρα τοπικά Lipschitz.

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $\|x_n - x\|_2 < r_x$. Για κάθε τέτοιο n ορίζουμε $y_n = x_n + a_n \nabla f(x_n)$ όπου $a_n > 0$ αρκούντως μικρό ώστε $\|y_n - x\| < r_x$.

Αρκεί να πάρουμε $a_n > 0$ έτσι ώστε $a_n < \frac{r_x - \|x - x_n\|_2}{\|\nabla f(x_n)\|_2}$ όταν $\nabla f(x_n) \neq \vec{0}$.

και αυθαίρετο $a_n > 0$ διαφορετικά.

Τότε, από την τριγωνική ανισότητα $\|x - y_n\|_2 < r_x$.



$$\begin{aligned} \text{Τότε} \quad \|y_n - x_n\|_2 \cdot M_x &\geq |f(y_n) - f(x_n)| \geq f(y_n) - f(x_n) \\ &\geq \langle \nabla f(x_n), y_n - x_n \rangle + f(x_n) - f(x_n) \\ &= a_n \|\nabla f(x_n)\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow M_x a_n \|\nabla f(x_n)\|_2 \geq a_n \|\nabla f(x_n)\|_2^2 \quad \Leftrightarrow \text{αν } \nabla f(x_n) \neq \vec{0}$$

$$\|\nabla f(x_n)\|_2 \leq M_x \quad \forall n \geq n_0$$

Άρα $\|\nabla f(x_n)\|_2 \leq \max \{M_x, \|\nabla f(x_1)\|_2, \dots, \|\nabla f(x_{n-1})\|_2\} := M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, το οποίο δείχνει ότι η $(\nabla f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

απόδειξη (2)

Έστω $\nabla f(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$, $k_1 < k_2 < \dots$ μια συγκλίνουσα υποκολουθία της $(\nabla f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ και έστω L το όριο της.

Για κάθε $y \in K$, $f(y) \geq \langle \nabla f(x_n), y - x_n \rangle + f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$

Ειδικότερα, $f(y) \geq \langle \nabla f(x_{k_n}), y - x_{k_n} \rangle + f(x_{k_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in K$

Παίρνουμε όριο καθώς $n \rightarrow \infty$. Επειδή η f είναι κυρτή είναι συνεχής, και επειδή $x_n \rightarrow x$ έχουμε ότι $x_{k_n} \rightarrow x$, άρα $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x)$.

Επίσης $\langle \nabla f(x_{k_n}), y - x_{k_n} \rangle \rightarrow \langle L, y - x \rangle \quad (**)$

Πράγματι,

$$|\langle \nabla f(x_{k_n}), y - x_{k_n} \rangle - \langle L, y - x \rangle| = |\langle \nabla f(x_{k_n}) - L, y - x \rangle + \langle \nabla f(x_{k_n}), x - x_{k_n} \rangle|$$

τριγωνική
και μετά C-S $\rightarrow \leq \|\nabla f(x_{k_n}) - L\|_2 \|y - x\|_2 + \|\nabla f(x_{k_n})\|_2 \|x - x_{k_n}\|_2$

$$\rightarrow 0 \cdot \|y - x\|_2 + 0 = 0$$

επειδή $\|x - x_{k_n}\|_2 \rightarrow 0$ και $\|\nabla f(x_{k_n})\|_2$ φραγμένη ακολουθία
πραγματικών αριθμών από (1)

Αρα από (*), (**) έπεται ότι $f(y) \geq \langle L, y - x \rangle + f(x) \quad \forall y \in K$

Αρα $L \in \partial f(x)$ και επειδή η f είναι διαφορίσιμη, πρέπει
 $L = \nabla f(x)$.

Από τους ισχυρισμούς (1), (2) και το Λήμμα έπεται ότι $\nabla f(x_n) \rightarrow \nabla f(x)$.

Αρα ∇f είναι συνεχής στο $x \in K$ και άρα τελικά σε όλο το K .

Με άλλα λόγια $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ είναι συνεχής για κάθε $i \in \{1, \dots, d\}$ ■

Απόδειξη Λήμματος

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ της οποίας όλα τα
υπακολουθακά όρια είναι a .

Έστω ότι $a_n \not\rightarrow a$ Τότε

$\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Η (a_{k_n}) είναι φραγμένη ακολουθία, άρα από B-W, έχει
υπακολουθία $(a_{k_{m_n}})_{n \in \mathbb{N}}$, $m_1 < m_2 < \dots$ η οποία συγκλίνει.

Όμως, η $(a_{k_{m_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, άρα το
όριό της πρέπει να είναι a ,

από υπόθεση όμως $|a_{k_{m_n}} - a| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα
έχουμε άτοπο.

Έπεται ότι $a_n \rightarrow a$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και κυρτό κ' $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή.
Τότε, υπάρχει $A \subseteq K$ μέτρου μηδέν τέτοιο ώστε η f
να είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του $K \setminus A$.

Παρατήρηση

Για $d=1$, το A είναι αριθμήσιμο, και άρα έχει μέτρο μηδέν.

Στις διαστάσεις $d \geq 2$ το σύνολο στο οποίο μια κυρτή
συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη μπορεί να είναι υπεραριθμήσιμο.

π.χ. για $d=2$

$f(x,y) = |x|$ δεν είναι διαφορίσιμη σε κάθε
σημείο $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και κυρτό και μία $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή. Τότε, υπάρχει $A \subseteq K$ μέτρου μηδέν, τέτοιο ώστε η f να είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του $K \setminus A$.

Απόδειξη

Για κάθε δείκτη (κατεύθυνση) $i \in \{1, \dots, d\}$ και $d-1$ σημεία $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d \in \mathbb{R}$

Θέτουμε: $K_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)} = \{x \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) \in K\}$

και ορίζουμε: $f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)} : K_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)} \rightarrow \mathbb{R}$ με
 $f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)}(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d)$

Κάθε $K_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)}$ είναι κυρτό και ανοικτό, (αυτό αρνείται ως άσκηση)
 $(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x + (1-\lambda)y, x_{i+1}, \dots, x_d)$

$$= \lambda(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) + (1-\lambda)(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_d)$$

και επίσης κάθε $f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)}$ είναι κυρτή συνάρτηση.

π.χ. για $d=2$

$$\begin{aligned} f_{x_2}^{(1)}(x) &= f(x, x_2) \\ \text{σταθεροποιήμένο } x_2 &\rightarrow x_2 \\ f_{x_1}^{(2)}(x) &= f(x_1, x) \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχουν για κάθε $x \in K_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)}$ οι πλευρικές παραγώγους

$$\left(f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)} \right)'_+(x), \left(f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)} \right)'_-(x)$$

και αν αυτές οι δύο είναι ίσες, τότε η $f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)}$ είναι παραγωγίσιμη στο x και η παράγωγός της ισούται:

$$\left(f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}^{(i)} \right)'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d)$$

Το αριστερό μέλος ισούται εξ'ορισμού με: $\vec{x}$

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d)}{y - x}$$

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(\vec{x} + (y-x)e_i) - f(\vec{x})}{y - x} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d)$$

Έστω $A = \{x \in K : \eta \text{ δεν είναι διαφορίσιμη στο } x\}$

Δηλαδή $A = \bigcup_{i=1}^d \underbrace{\left\{ x \in K : \nexists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\}}_{A^{(i)}}$

Κάθε $A^{(i)}$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

Πράγματι, ορίσουμε:

$$h_{n,i}(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}e_i) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad x \in K$$

$$g_{n,i}(x) = \frac{f(x - \frac{1}{n}e_i) - f(x)}{-\frac{1}{n}}$$

είναι συνεχείς, άρα (Borel) μετρήσιμες

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,i}(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^+(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{n,i}(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^-(x)$$

$$A^{(i)} = \left\{ x \in K : \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^+(x)}_{\text{μετρήσιμη}} > \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^-(x)}_{\text{μετρήσιμη}} \right\}$$

Άρα κάθε $A^{(i)}$ είναι (Borel) μετρήσιμο.

λ_d = d-διάστατο μέτρο Lebesgue

λ_1 = 1-διάστατο μέτρο Lebesgue

Fubini

$$\lambda_d(A^{(i)}) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int \lambda_1(\{x \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) \in A^{(i)}\}) d\lambda_{d-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε $\lambda_d = \lambda_{d-1} \times \lambda_1$

$$\begin{aligned}
&= \int \lambda_1(\{x \in \mathbb{R} : \# \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d)\}) d\lambda_{d-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \\
&= \int \lambda_1(\underbrace{\{x \in \mathbb{R} : \# (f_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d}'(x))\}}_{\text{αριθμησιμότητα}}) d\lambda_{d-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \\
&= \int 0 d\lambda_{d-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Έπεται ότι :

$$\lambda_d(A) \leq \sum_{i=1}^d \lambda_d(A^{(i)}) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό και κυρτό, και μια συνάρτηση $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Τότε :

Η f είναι κυρτή $\iff \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in K$

Απόδειξη (Άσκηση)

Παρατήρηση: Για $d=1$ $[f'(x) - f'(y)] \cdot (x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in K$
 που σημαίνει ότι οι παράγωγοι είναι ομόσημοι, άρα η f' είναι αύξουσα

Έστω $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό κ' $f: U \rightarrow \mathbb{R}$
 Αν η f έχει μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$
 σε κάποιο $x \in U$, τότε ο εσσιανός πίνακας της f στο x
 είναι ο πίνακας

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j \in \{1, \dots, d\}}$$

Αν η f είναι C^2 , τότε ο εσσιανός πίνακας $Hf(x)$ είναι συμμετρικός, γιατί τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

(f είναι C^2 θα πει οι μερικές παράγωγοι 2^{ης} τάξης, υπάρχουν και είναι συνεχείς.)

ΟΡΙΣΜΟΣ [θετικά ημιορισμένος πίνακας]

Έστω A ένας $d \times d$ συμμετρικός πίνακας. Ο A είναι θετικά ημιορισμένος αν $\langle Au, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$ και είναι θετικά ορισμένος αν $\langle Au, u \rangle > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{0}\}$

Παρατήρηση:

$$\langle Au, u \rangle = \sum_{i=1}^d (Au)_i u_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij} u_j u_i$$

Πρόταση 1

Έστω A ένας συμμετρικός $d \times d$ πίνακας.

- $\left[\begin{array}{l} \text{Ο } A \text{ είναι θετικά ημι-ορισμένος} \\ \text{οι ιδιοτιμές του είναι όλες } \geq 0 \end{array} \right. \quad \underline{\text{ανν}}$
- $\left[\begin{array}{l} \text{Ο } A \text{ είναι θετικά ορισμένος} \\ \text{οι ιδιοτιμές του είναι όλες } > 0 \end{array} \right. \quad \underline{\text{ανν}}$

ΟΡΟΛΟΓΙΑ Έστω A $d \times d$ πίνακας. $\Delta_I(A)$ συμβολίζει την ορίγουσα που προκύπτει αν κρατήσουμε μόνο γραμμές και στήλες του A που αντιστοιχούν σε δείκτες στο σύνολο I , για κάθε $\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, d\}$

π.χ. $\Delta_{\{1, \dots, d\}}(A) = \text{ορίγουσα του } A$

$$\Delta_{\{i\}}(A) = A_{ii}$$

Πρόταση 2

Έστω A ένας συμμετρικός $d \times d$ πίνακας. Τότε A είναι
θετικά ημι-ορισμένος ανν
 $\Delta_I(A) \geq 0$ για κάθε $I \in 2^{\{1, \dots, d\}} \setminus \{0\}$

A είναι θετικά ορισμένος ανν
 $\Delta_I(A) > 0$ για κάθε $I \subseteq \{1, \dots, d\}$ της μορφής $I = \{1, 2, \dots, k\}$
 $\forall k \leq d$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και ανοιχτό και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση (δηλ έχει μερικές παραγώγους 2^{ης} τάξης και αυτές είναι συνεχείς).
Τότε, η f είναι κυρτή αν ο εσσιανός πίνακας $Hf(x)$ είναι
θετικά ημιορισμένος για κάθε $x \in K$.

Απόδειξη

[$\Rightarrow$] Έστω ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x \in K$.
Θα δείξουμε ότι $\langle Hf(x)u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$

Έστω $u \in \mathbb{R}^d$. Ορίζουμε: $I_{x,u} = \{t \in \mathbb{R} : x + tu \in K\}$ κυρτό κ' ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}$
αρα ανοιχτό διάστημα
και $g_{x,u}: I_{x,u} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g_{x,u}(t) = f(x + tu)$.
Γνωρίζουμε ότι η $g_{x,u}$ είναι κυρτή

Θέτουμε $\gamma(t) = x + tu$ για $t \in I_{x,u}$

Τότε $g_{x,u} = f \circ \gamma$

Απο τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\Rightarrow g'_{x,u}(t) = J_f(\gamma(t)) J_\gamma(t) \quad g'_{x,u}(t) = J_{g_{x,u}}(t) = J_{f \circ \gamma}(t)$$

$$g'_{x,u}(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(\gamma(t)) \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \leftarrow \gamma'_d(t) \end{matrix}$$

$$g'_{x,u}(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), u \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Αρα, } g''_{x,u}(t) &= \frac{d}{dt} \langle \nabla f(\gamma(t)), u \rangle = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) u_i \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \gamma \right)'(t) u_i = \sum_{i=1}^d \left\langle \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)), u \right\rangle u_i = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \langle \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)), u \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) u_j u_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x(t)) u_i u_j \\
 &= \langle Hf(x(t)) u, u \rangle
 \end{aligned}$$

Τώρα επειδή η $g_{x,u}$ είναι κυρτή (απο την μονοδιάστατη περίπτωση) πρέπει

$$g''_{x,u}(t) \geq 0 \quad \forall t \in I_{x,u} \quad (*) \quad x(t) = x + tu \Rightarrow x(0) = x$$

Ειδικότερα, πρέπει $g''_{x,u}(0) \geq 0$, δηλαδή $\langle Hf(x) u, u \rangle \geq 0$

Σχόλιο: Ξεκινήσαμε με ένα τυχόν x , πήραμε και μία τυχαία διεύθυνση u και αποδείξαμε ότι $\langle Hf(x) u, u \rangle \geq 0$, που σημαίνει ότι ο πίνακας $Hf(x)$ είναι θετικά ημιορισμένος για κάθε $x \in K$.

[$\Leftarrow$] Υποθέτουμε ότι $Hf(x) \geq 0$, δηλαδή ότι ο $Hf(x)$ είναι θετικά ημιορισμένος $\forall x \in K$. Έστω $x, y \in K$, με $x \neq y$. Ορίσουμε

$$g(t) = f(x + t(y-x)), \quad t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

για κατάλληλο $\varepsilon > 0$.

Όπως πριν, με τον κανόνα της αλυσίδας:

$$g'(t) = \langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle$$

και καταλήγουμε $g''(t) = \langle Hf(x + t(y-x)) (y-x), y-x \rangle$

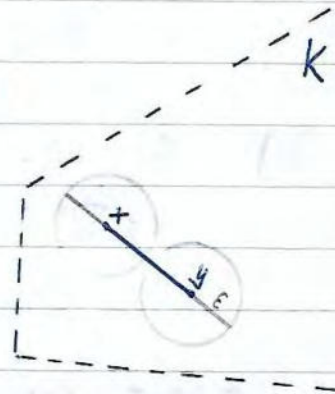
Γνωρίζουμε ότι $g''(t) \geq 0 \quad \forall t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, άρα η g είναι κυρτή.

Άρα $g(t) = g(t \cdot 1 + (1-t) \cdot 0) \leq t g(1) + (1-t) g(0) \quad \Leftrightarrow$

$$f(x + t(y-x)) \leq t f(y) + (1-t) f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Έπεται ότι η f είναι κυρτή.



Αφφινικοί Υπόχωροι

Ορισμός [αφφινικός υπόχωρος]

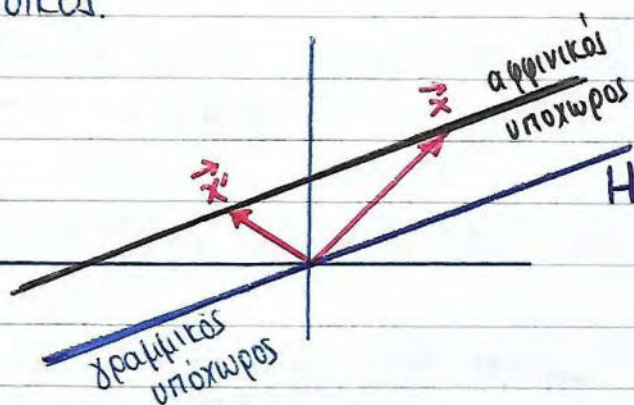
Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^d$ λέγεται αφφινικός υπόχωρος αν γράφεται ως $A = H + x$ για κάποιο γραμμικό υπόχωρο H του $\mathbb{R}^d$ και $x \in \mathbb{R}^d$.

Παρατηρήσεις

- (1) Αν A είναι αφφινικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$ και $a \in A$, τότε ο $A - a$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$.
- (2) Αν $A - a$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}^d$, τότε ο A είναι αφφινικός υπόχωρος.
- (3) Αν ο A είναι αφφινικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$ και $a \in A$, τότε ο $A - a$ είναι ανεξάρτητος του a .
- (4) Αν $A = H + x$ για κάποιο γραμμικό υπόχωρο H του $\mathbb{R}^d$ και $x \in \mathbb{R}^d$, τότε ο H είναι μοναδικός.

► Απόδειξη (2)

Θέτουμε $H = A - a$. Είναι γραμμικός.
Θέτουμε $x = a \in \mathbb{R}^d$. Τότε, $A = H + x$,
δηλαδή A αφφινικός υπόχωρος.



Η μετατόπιση του H κατά $\vec{x}$ ή $\vec{x}'$ μου δίνουν τον ίδιο αφφινικό υπόχωρο

► Απόδειξη (1)

Έστω ότι $A = H + x$ για κάποιο H γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^d$ και $x \in \mathbb{R}^d$. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $a \in A$, ο $A - a$ είναι γραμμικός υπόχωρος.

Έστω $a \in A$. Τότε, υπάρχει $h \in H$ τ.ω. $a = h + x$.

$$\text{Οπότε } A - a = H + x - a = H + x - h - x \Leftrightarrow A - a = H - h$$

Όμως H είναι γραμμικός υπόχωρος και $h \in H$, άρα από την τελευταία ισότητα καταλήγουμε: $A - a = H$

Οπότε $A - a$ γραμμικός υπόχωρος.

► Απόδειξη (3)

Έστω ότι ο A είναι αφινικός, άρα $A = H + x$ για κάποιο γραμμικό υπόχωρο H του $\mathbb{R}^d$, και $x \in \mathbb{R}^d$, και έστω $a, b \in A$. Θέλουμε να δείξουμε ότι οι χώροι $A - a, A - b$ είναι ίδιοι για κάθε $a, b \in A$.

Υπάρχουν $h, g \in H$ τ.ω. $a = h + x, b = g + x$

$$\text{Οπότε } A - a = H + x - a = H + x - b + (b - a), \text{ και } \underline{b - a = g - h \in H}$$

$$\text{Άρα } A - a = H + x - b = A - b$$

↓
αφ' ου $g - h$ στοιχείο του H
ενσωματώνεται στο H

► Απόδειξη (4)

Έστω ότι: $A = H + x = H' + x'$ με H, H' γραμμικούς υποχώρους

Τότε επειδή H, H' γραμμικοί θα περιέχουν το 0 , άρα $x, x' \in A$

$$\text{Οπότε } H = A - x \stackrel{(3)}{=} A - x' = H'$$

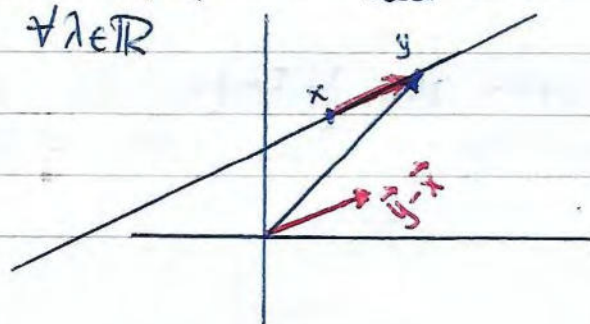
Πρόταση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ο A είναι αφινικός υπόχωρος

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A \quad \forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{ή } y + \lambda(x - y)$$

ανν :



ανν για κάθε 2 σημεία του περιέχει
και την ευθεία που τα ενώνει

Απόδειξη

- Έστω ότι ο A είναι αφινικός υπόχωρος, δηλ. $A = H + x$ για κάποιο γραμμικό υπόχωρο H και κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$. Έστω $y, z \in A$. Τότε $y - x, z - x \in H$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο αφινικός συνδυασμός $\lambda y + (1 - \lambda)z$ ανήκει επίσης στο $A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lambda y + (1 - \lambda)z &= \lambda y - x + (1 - \lambda)z + x = \lambda y - [\lambda x + (1 - \lambda)x] + (1 - \lambda)z + x \\ &= \underbrace{\lambda(y - x)}_{\in H} + \underbrace{(1 - \lambda)(z - x)}_{\in H} + x \\ &\quad \in H, \text{ αφού } H \text{ γραμμικός}\end{aligned}$$

Άρα $(\lambda y + (1 - \lambda)z) \in H + x = A$

- Αντίστροφα, έστω ότι το A έχει την ιδιότητα ότι με κάθε δύο στοιχεία του $x, y \in A$ περιέχει και την ευθεία $\lambda x + (1 - \lambda)y \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Πρέπει να δείξουμε ότι ο A είναι αφινικός, δηλαδή ότι ο A γράφεται $A = H + x$ για κάποιον γραμμικό υπόχωρο H και $x \in \mathbb{R}^d$.

Έστω $a \in A$. Αρκεί να δείξουμε ότι $A - a$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$.
Έστω $x, y \in A - a = H$. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$

Για αρχή θα δείξουμε ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί μεταξύ των x και y της μορφής $\lambda x + (1 - \lambda)y \in H$

Υπάρχουν $x', y' \in A$ τω $x = x' - a$ και $y = y' - a$
Οπότε

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \underbrace{\lambda x' + (1-\lambda)y'}_{\in A \text{ από υπόθεση}} - a \in A - a = H$$

- Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Έστω πρώτα ότι $\lambda + \mu \neq 0$, τότε
$$\lambda x + \mu y = (\lambda + \mu) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} y \right) + (1 - \lambda - \mu) \cdot 0$$

Το $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} y \in H$ από την περίπτωση παραπάνω
(οι συντελεστές έχουν άθροισμα 1)

Επίσης $0 \in H$. $\leftarrow H = A - a$, και το $a \in A$
Αρα από την προηγούμενη περίπτωση πάλι
$$\underbrace{(\lambda + \mu) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} y \right)}_{\in H} + \underbrace{(1 - \lambda - \mu) \cdot 0}_{\in H} \in H$$

- Έστω τώρα ότι $\lambda + \mu = 0$. Αν $\lambda = 0$, τότε $\mu = 0$, άρα
 $\lambda x + \mu y = 0 \in H$.
Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\mu = -\lambda$, άρα $\lambda x + \mu y = \lambda x + \lambda(-y)$
και $\lambda + \lambda \neq 0$ και άρα, αρκεί να δείξουμε ότι $-y \in H$

Όμως $-y = 2 \cdot 0 + (-1)y$ και επειδή $2 + (-1) = 1$ και $0 \in H$
και $y \in H$, έπεται ότι $-y \in H$ από την πρώτη περίπτωση
που κάναμε.

Αρα δείξαμε ότι $\lambda x + \mu y \in H \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Επομένως δείξαμε
ότι ο H είναι γραμμικός υπόχωρος, όπου $H = A - a$,
και επομένως το A είναι αффинный υπόχωρος.

ΟΡΟΛΟΓΙΑ Έστω $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, κάθε γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ με $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ λέγεται αφινικός συνδυασμός των $x_1, \dots, x_n$

Για $n=2$: $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

Η προηγούμενη πρόταση γενικεύεται:

Πρόταση

Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ο A είναι αφινικός υπόχωρος αν περιέχει όλους τους αφινικούς συνδυασμούς στοιχείων του.

Απόδειξη

Αν ο A περιέχει όλους τους συνδυασμούς στοιχείων του, τότε $\lambda x + (1-\lambda)y \in A \quad \forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Άρα από προηγούμενη πρόταση ο A είναι αφινικός.

Αντίστροφα, έστω ότι ο A είναι αφινικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$, τότε $\forall x_1, x_2 \in A \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, έχουμε ότι $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$ από την προηγούμενη πρόταση.

Έστω τώρα ότι για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$ και $\forall x_1, \dots, x_n \in A$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ έχουμε $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in A$.

Έστω $x_1, \dots, x_{n+1} \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$.

Μπορώ να υποθέσω ότι $\lambda_i \neq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$, διότι αλλιώς προκύπτει αφινικός συνδυασμός με μήκος $\leq n$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} =$$

$$= (1 - \lambda_{n+1}) \sum \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

$x_{n+1} \in A$ εξ' υποθέσεως
 Από επαγωγική υπόθεση $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} x_i \in A$ γιατί είναι αффινικός
 συνδυασμός των στοιχείων $x_1, \dots, x_n$ του A με μήκος $\leq n$

Έπεται ότι $(1 - \lambda_{n+1}) \sum \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in A$ ως αффινικός
 συνδυασμός μήκους $2 = n$ στοιχείων του A .

Πρόταση

Αν $A_i, i \in I$, είναι αυθαίρετη οικογένεια αффινικών υποχώρων
 του $\mathbb{R}^d$, τότε $\bigcap_{i \in I} A_i$ είναι επίσης αффινικός υπόχωρος.

Απόδειξη

Έστω $x, y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $x, y \in A_i \ \forall i \in I$ και
 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A_i \ \forall i \in I$, επειδή κάθε A_i είναι αффινικός
 υπόχωρος, και άρα $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_{i \in I} A_i$

Έπεται από προ-προηγούμενη πρόταση ότι η τομή είναι
 αффινικός υπόχωρος.

Ορισμός [Αффινική θήκη]

Έστω $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^d$. Η αффινική θήκη του S είναι το
 σύνολο $\text{aff}(S) = \bigcap \{ A \mid A \text{ αффινικός υπόχωρος που περιέχει το } S \}$

Το $\text{aff}(S)$ είναι αффινικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$ που περιέχει το S
 και είναι ο μικρότερος αффινικός υπόχωρος που περιέχει το S ,
 δηλαδή κάθε αффινικός υπόχωρος που περιέχει το S περιέχει
 και τον $\text{aff}(S)$.

Πρόταση

Έστω $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^d$. Το $\text{aff}(S)$ αποτελείται ακριβώς από όλους τους αφφινικούς συνδυασμούς στοιχείων του S .

Απόδειξη ακριβώς ίδια με την απόδειξη ότι η κυρτή θήκη $\text{conv}(S)$ αποτελείται ακριβώς από όλους τους κυρτούς συνδυασμούς στοιχείων του S .

Ορισμός

Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι αφινικός υπόχωρος αν υπάρχει: γραμμικός υπόχωρος H και $x \in \mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε $A = H + x$

Ο H είναι αναγκαστικά μοναδικός.

Ορισμός

Για $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^d$ καλούμε αφινική θέση του S το σύνολο $\text{aff}(S) = \{A \mid A \text{ αφινικός υπόχωρος του } \mathbb{R}^d \text{ και } A \supseteq S\}$

Ορισμός

Έστω $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^d$. Η διάσταση του S , $\dim(S)$, ορίζεται ως εξής:

« υπάρχει μοναδικός γραμμικός υπόχωρος H τέτοιος ώστε $\text{aff}(S) = H + x$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$ και $\dim(S) = \dim(H)$ »

Σχόλιο: Ξεκινάμε με ένα $S \neq \emptyset$, το οποίο έχει αφινική θέση που περιέχει το S , άρα $\text{aff}(S) \neq \emptyset$. Η αφινική θέση είναι αφινικός υπόχωρος. Κάθε αφινικός υπόχωρος γράφεται ως $H + x$ για κάποιον γραμμικό υπόχωρο H και $x \in \mathbb{R}^d$ εξ' ορισμού και αυτό το H είναι μοναδικό. Άρα η αφινική θέση ορίζει έναν γραμμικό υπόχωρο, όποτε ορίσουμε $\dim(S) = \dim(H)$.

Ορισμός [Αφινικά ανεξάρτητα]

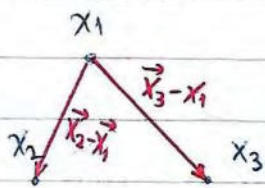
Έστω $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Αυτά θα λέγονται αφινικά ανεξάρτητα αν για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \text{ και } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

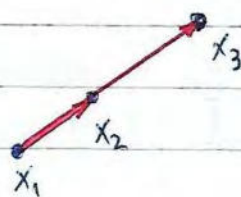
Διαφορετικά, τα $x_1, \dots, x_n$ θα λέγονται αφινικά εξαρτημένα.

Πρόταση Έστω $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Αν τα $x_1, \dots, x_n$ είναι αффινικά ανεξάρτητα, τότε τα διανύσματα $x_j - x_i$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Αντιστρόφως, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}^d$, τα $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα $x_0, x_1, \dots, x_n$ είναι αффινικά ανεξάρτητα.



x_1, x_2, x_3 αффινικά ανεξάρτητα
 $\vec{x_2 - x_1}, \vec{x_3 - x_1}$ γραμμ. ανεξ.



x_1, x_2, x_3 όχι αффινικά ανεξάρτητα
 $\vec{x_2 - x_1}, \vec{x_3 - x_1}$ γραμμ. εξαρτημένα

Απόδειξη

► Έστω ότι τα $x_1, \dots, x_n$ είναι αффινικά ανεξάρτητα.

Έστω $i \in \{1, \dots, n\}$. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\lambda_1 (x_1 - x_i) + \dots + \lambda_{i-1} (x_{i-1} - x_i) + \lambda_i (x_{i+1} - x_i) + \dots + \lambda_{n-1} (x_n - x_i) = 0 \iff$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + (-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}) x_i + \lambda_i x_{i+1} + \dots + \lambda_{n-1} x_n = 0$$

Απο την αффινική ανεξαρτησία των $x_1, \dots, x_n$ θα πρέπει οι συντελεστές στην τελευταία εξίσωση να είναι όλοι μηδέν.

Παρατήρηση: $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} + (-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}) = 0$

Άρα πρέπει: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = -\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1} = 0$

Επεται ότι τα διανύσματα $x_j - x_i$ $\forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

► Αντιστρόφως, έστω ότι για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}^d$, τα $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θέλω να δείξω ότι τα $x_0, x_1, \dots, x_n$ είναι αффινικά ανεξάρτητα.

Έστω $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ και
 $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ (*)
 Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Έχουμε ότι $\lambda_0 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n$ (**)

$$(*) \Rightarrow (-\lambda_1 - \dots - \lambda_n)x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) + \dots + \lambda_n(x_n - x_0) = 0$$

Απο γραμμική ανεξαρτησία των $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ έπεται ότι
 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

$$(**) \Rightarrow \lambda_0 = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = 0$$

Άρα τα διανύσματα $x_0, x_1, \dots, x_n$ είναι αφινικά ανεξάρτητα.

Πόρισμα

Ο μέγιστος αριθμός αφινικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^d$
 είναι $d+1$.

Πρόταση Έστω $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε $\dim(S) \geq k$
αν υπάρχουν $k+1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία στο S .

Αποδείξη

► Έστω ότι υπάρχουν $k+1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία στο S ,
 έστω $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$.

Τότε τα $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα
 και περιέχονται στο σύνολο $S - x_0$ και άρα περιέχονται
 στον χώρο $\langle S - x_0 \rangle$

Άρα $\dim(\langle S - x_0 \rangle) \geq k$

Συμβολισμός για $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $\langle S \rangle$
 ο γραμμικός χώρος που παράγει
 το S

Ισχυρισμός: $\dim(S) = \dim(\langle S-x_0 \rangle)$

↳ αποδείξη

Εξ' ορισμού ο $\langle S-x_0 \rangle$ είναι γραμμικός υπόχωρος και περιέχει το $S-x_0$, δηλαδή $S-x_0 \in \langle S-x_0 \rangle$, άρα $\langle S-x_0 \rangle + x_0 \supseteq S$

$$\Rightarrow \langle S-x_0 \rangle + x_0 \supseteq \text{aff}(S)$$

Για τον αντίστροφο εκλεισμό:

Ο $\text{aff}(S) - x_0$ είναι γραμμικός, γιατί ο $\text{aff}(S)$ είναι αφινικός και περιέχει το x_0 , δηλ. $x_0 \in \text{aff}(S)$.

Επίσης, $S-x_0 \subseteq \text{aff}(S) - x_0$ και άρα ο γραμμικός χώρος που παράγεται $\langle S-x_0 \rangle \subseteq \text{aff}(S) - x_0$ και άρα ο $\langle S-x_0 \rangle + x_0 \subseteq \text{aff}(S)$

$$\text{Επεται ότι } \text{aff}(S) = \langle S-x_0 \rangle + x_0$$

Άρα, $\langle S-x_0 \rangle$ είναι ο μοναδικός γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$ για τον οποίον $\text{aff}(S) = H + x$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, και άρα $\dim(S) = \dim \langle S-x_0 \rangle$.

► Για το αντίστροφο, θα χρειαστούμε το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα:

Έστω $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε αν $\dim \langle B \rangle \geq k$, τότε το B περιέχει τουλάχιστον k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα
↳ αποδείξη

Έστω $x_1 \in B$. Αν $B \setminus \langle x_1 \rangle = \emptyset$, τότε $B \subseteq \langle x_1 \rangle$, άρα $\langle B \rangle \subseteq \langle x_1 \rangle$ και άρα $k \leq \dim \langle B \rangle \leq \dim \langle x_1 \rangle$.
Αν $B \setminus \langle x_1 \rangle \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $x_2 \in B \setminus \langle x_1 \rangle$. Επειδή $x_2 \notin \langle x_1 \rangle$, τότε τα x_1, x_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Μπορούμε να διαλέξουμε $x_1, x_2, \dots, x_m \in B$ γραμμικά ανεξάρτητα
όσο $B \setminus \langle x_1, \dots, x_{m-1} \rangle \neq \emptyset$

Αν για κάποιο m , $B \setminus \langle x_1, \dots, x_m \rangle = \emptyset$, τότε
 $B \subseteq \langle x_1, \dots, x_m \rangle$. Άρα, $\langle B \rangle \subseteq \langle x_1, \dots, x_m \rangle \implies$
 $k \leq \dim \langle B \rangle \leq \dim \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ και άρα $m \geq k$.

Πρόταση

Έστω $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^d$, αυτό θα έχει διάσταση $\dim(S) \geq k$ αν το S περιέχει τουλάχιστον $k+1$ αффινικά ανεξάρτητα σημεία.

[Απόδειξη $\Leftarrow$] Δείχθηκε στο Μάθημα 11

[Απόδειξη $\Rightarrow$] Θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα Έστω $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^d$

Αν $\dim \langle B \rangle \geq k$, τότε το B περιέχει τουλάχιστον k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα

↳ Απόδειξη: Έστω $x_1 \in B \setminus \{0\}$.

Αν δεν υπάρχει τέτοιο, τότε $B = \{0\}$ και $k \leq \dim \langle B \rangle = 0$

Αν $B \setminus \langle x_1 \rangle = \emptyset$, τότε $B \subseteq \langle x_1 \rangle$, άρα $\langle B \rangle \subseteq \langle x_1 \rangle$

άρα $k \leq \dim \langle B \rangle \leq \dim \langle x_1 \rangle = 1$. Άρα, το Λήμμα έχει αποδειχθεί

Αν $B \setminus \langle x_1 \rangle \neq \emptyset$, τότε έστω $x_2 \in B \setminus \langle x_1 \rangle$. Τότε, $x_1, x_2 \in B$ και x_1, x_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Πράγματι, έστω $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$.

Αν $\lambda_2 \neq 0$, τότε $x_2 \in \langle x_1 \rangle$, άτοπο.

Αν $\lambda_2 = 0$, τότε $\lambda_1 x_1 = 0$ και επειδή $x_1 \neq 0$ πρέπει $\lambda_1 = 0$. Άρα, όντως x_1, x_2 γραμμ. ανεξάρτητα.

Έστω ότι βρήκαμε $x_1, x_2, \dots, x_m \in B$ γραμμικά ανεξάρτητα.

Αν $B \setminus \langle x_1, \dots, x_m \rangle = \emptyset$, τότε $B \subseteq \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ και άρα $\langle B \rangle \subseteq \langle x_1, \dots, x_m \rangle$.

και άρα $k \leq \dim \langle B \rangle \leq \dim \langle x_1, \dots, x_m \rangle = m$

Αρα η απόδειξη έχει τελειώσει, έχουμε βρει $m \geq k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο B .

Αν $B \setminus \langle x_1, \dots, x_m \rangle \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $x_{m+1} \in B \setminus \langle x_1, \dots, x_m \rangle$.
Τότε $x_{m+1} \in B$ και τα $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1} \in \mathbb{R}$ τ.ω.
 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m + \lambda_{m+1} x_{m+1} = 0$.

Αν $\lambda_{m+1} \neq 0$, τότε $x_{m+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} x_1 - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} x_m \in \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ ατοπο.

Αρα $\lambda_{m+1} = 0$ και τότε $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$ και έπεται $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, επειδή $x_1, \dots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Αρα όντως τα $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί, μέχρι να βρούμε m γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, \dots, x_m \in B$ τ.ω.

$$B \setminus \langle x_1, \dots, x_m \rangle = \emptyset$$

Τότε, $B \subseteq \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ αρα $\langle B \rangle \subseteq \langle x_1, \dots, x_m \rangle$
αρα $k \leq \dim \langle B \rangle \leq \dim \langle x_1, \dots, x_m \rangle = m$

Αρα έχουμε βρει $m \geq k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο B . (Τέλος απόδειξης Λήμματος)

(... συνέχεια απόδειξης πρότασης $\implies$)

Έστω ότι $\dim(S) \geq k$.

Έστω $x_0 \in S$, τότε ο $\langle S - x_0 \rangle$ είναι ο μοναδικός γραμμικός υπόχωρος H του $\mathbb{R}^d$ για τον οποίο ισχύει
 $\text{aff}(S) = H + x$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$

Αρα (εξ' ορισμού) $\dim(S) = \dim(S - x_0)$, επομένως
 $\dim(S - x_0) \geq k$

Απο το Λήμμα υπάρχουν τουλάχιστον k γραμμικά ανεξάρτητα
διανύσματα στο $S - x_0$,
έστω $x'_1, \dots, x'_k$ τα διανύσματα αυτά.

Τότε, τα $x_1 := x'_1 + x_0, \dots, x_k := x'_k + x_0 \in S$
και τα $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα, γιατί τα
 $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πρόταση: Έστω $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\dim(S) = k$ και
έστω $x_0, x_1, \dots, x_k$ $k+1$ αφινικά ανεξάρτητα σημεία
στο S . Τότε κάθε $x \in \text{aff}(S)$ γράφεται σαν αφινικός
συνδυασμός των $x_0, x_1, \dots, x_k$ κατά μοναδικό τρόπο.

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in S$, τότε $\text{aff}(S) - x_0$ είναι γραμμικός υπό-
χωρος και είναι ο μοναδικός γραμμικός υπόχωρος H
του $\mathbb{R}^d$ για τον οποίο $\text{aff}(S) = H + x_0$
για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$.

Αρα $k = \dim S = \dim(\text{aff}(S) - x_0)$

Τα $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0 \in S - x_0 \subseteq \text{aff}(S) - x_0$

Τα $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επειδή
τα $x_0, x_1, \dots, x_k$ είναι αφινικά ανεξάρτητα, άρα λόγω
πλήθους αποτελούν βάση του $\text{aff}(S) - x_0$.

Επεται ότι $\forall x \in \text{aff}(S)$ υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$
τέτοια ώστε

$$\frac{x - x_0}{\text{aff}(S) - x_0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_i - x_0)$$

$$\Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + x_0 \left(1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i\right)$$

Δηλαδή, το x γράφεται σαν αφινικός συνδυασμός
των $x_0, x_1, \dots, x_k$.

Μονοσήμαντο:

Έστω ότι για κάποιο $x \in \text{aff}(S)$ ισχύει:

$$x = \sum_{i=0}^k a_i x_i = \sum_{i=0}^k b_i x_i \quad \text{με } a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, k\}$$

$$\text{τέτοια ώστε } \sum_{i=0}^k a_i = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=0}^k b_i = 1$$

$$\text{Τότε, } \sum_{i=0}^k (a_i - b_i) x_i = 0 \quad \text{και}$$

$$\sum_{i=0}^k (a_i - b_i) = \sum_{i=0}^k a_i - \sum_{i=0}^k b_i = 1 - 1 = 0$$

Απο την αφινική ανεξαρτησία των $x_0, x_1, \dots, x_k$ έπεται
ότι :

$$a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = \dots = a_k - b_k = 0$$

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΚΥΡΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Υπενθύμιση:

Αν (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε ένα $B \subseteq A$ είναι ανοικτό στον μετρικό χώρο $(A, \rho|_{A \times A})$ ανν γραφεται $B = B' \cap A$, όπου B' ανοικτό υποσύνολο του X .

Όμοια, ένα $B \subseteq A$ είναι κλειστό στον $\mu.χ.$ $(A, \rho|_{A \times A})$ ανν $B = B' \cap A$ για κάποιο κλειστό υποσύνολο B' του X .

Τότε, το B λέγεται σχετικά ανοικτό ή σχετικά κλειστό, αντίστοιχα.

Συμβολισμός:

Σε έναν $\mu.χ.$ (X, ρ)

- $U(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$

- $B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$

η ανοικτή και κλειστή μπάλα αντίστοιχα στον (X, ρ)

Αν $A \subseteq X$, οι ανοικτές και κλειστές μπάλες στον $\mu.χ.$ $(A, \rho|_{A \times A})$ είναι:

$$\{y \in A : \rho(x, y) < r\} = U(x, r) \cap A$$

$$\{y \in A : \rho(x, y) \leq r\} = B(x, r) \cap A$$

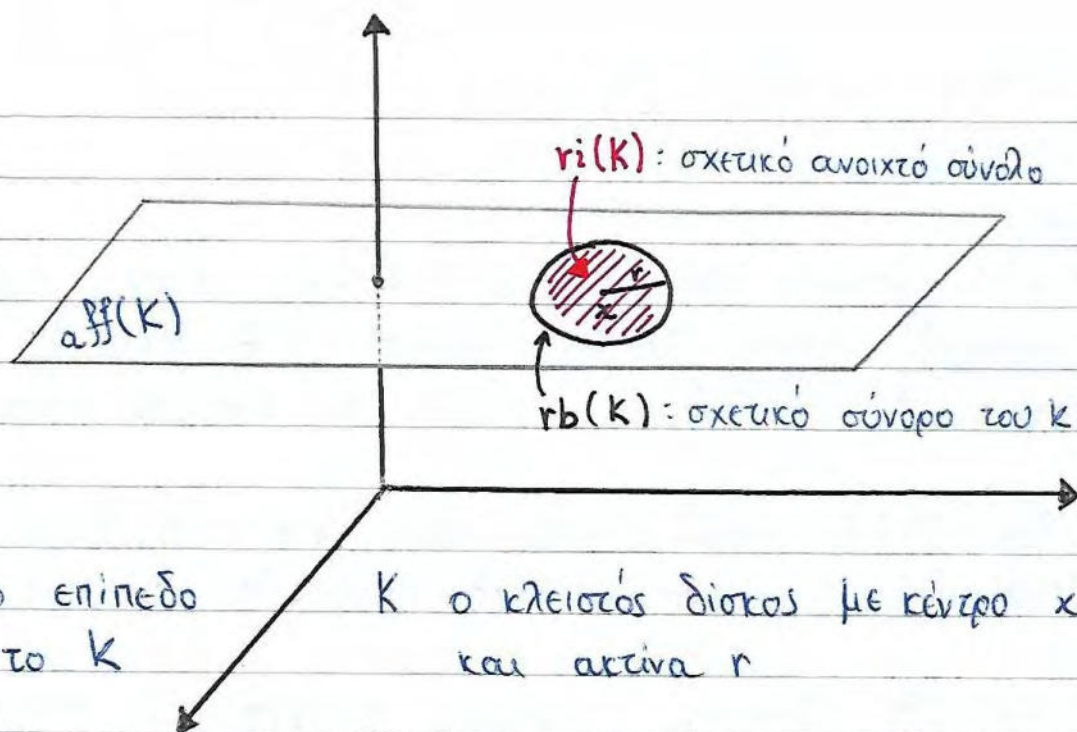
για $x \in A$ και $r > 0$.

Ορισμός Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό.

Το σχετικό εσωτερικό του K είναι το σύνολο:

$$\text{ri}(K) = \{x \in K : \exists r > 0 \text{ π.ω. } \text{aff}(K) \cap U(x, r) \subseteq K\}$$

ή με λόγια, είναι το εσωτερικό του K αν το δούμε ως υποσύνολο του $\mu.χ.$ $\text{aff}(K)$ με τον περιορισμό της Ευκλείδειας μετρικής του $\mathbb{R}^d$ στον $\text{aff}(K)$



Στον $\mathbb{R}^3$ το σύνορο του συνόλου K είναι το ίδιο το σύνολο K .

Σχετικό σύνορο του K

$$rb(K) := \bar{K} \setminus ri(K)$$



$$rb(K) := \{x \in aff(K) : \forall \epsilon > 0 \quad U(x, \epsilon) \cap K \neq \emptyset \quad aff(K) \cap U(x, \epsilon) \cap (\mathbb{R}^d \setminus K) \neq \emptyset\}$$

Παρατήρηση: Σχετική κλειστή θήκη δεν ορίζουμε, γιατί δεν διαφέρει από την κλειστή θήκη στον $\mathbb{R}^d$. Αυτό διότι, κάθε αφινικός υπόχωρος, άρα και ο $aff(K)$, είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και άρα περιέχει και το $\bar{K}$, και το $\bar{K}$ θα είναι και η σχετική κλειστή θήκη του K .

Ορισμός

Έστω $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ένα k -Simplex στον $\mathbb{R}^d$ είναι η κυρτή θήκη $k+1$ αφινικά ανεξάρτητων σημείων στον $\mathbb{R}^d$.

Δηλαδή, $conv(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ με τα $x_0, x_1, \dots, x_k$ αφινικά ανεξάρτητα.

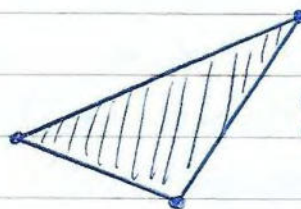
0-Simplex



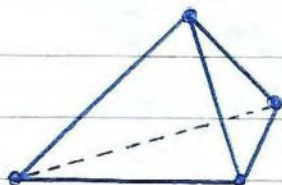
1-Simplex



2-Simplex

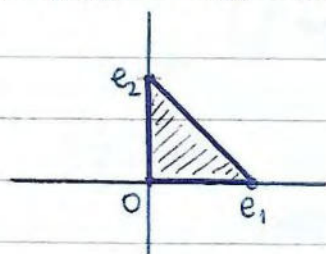


3-Simplex (τετράεδρο)

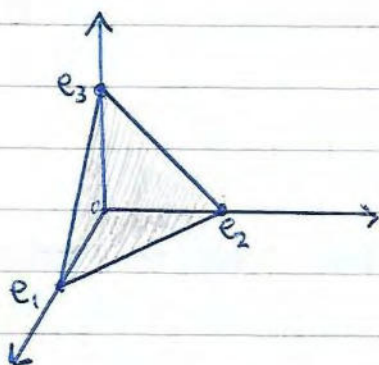


Κανονικό k -Simplex είναι το $\Sigma = \text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_k\})$, όπου $e_1, \dots, e_k$ τα βασικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^k$.

Κανονικό 2-Simplex



Κανονικό 3-Simplex



Κανονικό 1-Simplex



Πρόταση Έστω $S = \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ ένα k -Simplex, δηλαδή τα $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ αффινικά ανεξάρτητα. Τότε

$$\text{ri}(S) = \left\{ \sum_{i=0}^k c_i x_i : c_0, c_1, \dots, c_k \in (0,1) \text{ και } \sum_{i=0}^k c_i = 1 \right\}$$

Λήμμα 1 Έστω $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ αффινικά ανεξάρτητα. Η $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \text{aff}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ με $h(c_1, c_2, \dots, c_k) = \sum_{i=1}^k c_i(x_i - x_0) + x_0$ είναι ομοιομορφισμός.

Λήμμα 2 Έστω Σ το κανονικό k -Simplex στον $\mathbb{R}^k$, δηλαδή $\Sigma = \{ \sum_{i=1}^k c_i e_i : c_1, \dots, c_k \in [0, 1], \sum_{i=1}^k c_i \leq 1 \}$ ή $\Sigma = \text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_k\})$ ή $\Sigma = \{ (c_1, c_2, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k : c_1, \dots, c_k \in [0, 1], \sum_{i=1}^k c_i \leq 1 \}$. Τότε το εσωτερικό $\Sigma^\circ = \text{int}(\Sigma)$ του Σ είναι το σύνολο

$$\Sigma^\circ = \{ (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k : c_1, \dots, c_k \in (0, 1), \sum_{i=1}^k c_i < 1 \}$$

($e_1, \dots, e_k$ τα βασικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^k$)

Λήμμα 3 Έστω $h: X \rightarrow Y$ ομοιομορφισμός μεταξύ μετρικών χώρων. Τότε για $A \subseteq X$ ισχύει $h(\text{int}_X(A)) = \text{int}_Y(h(A))$

↳ Απόδειξη Λήμματος 3

$h(\text{int}_X(A)) \subseteq h(A)$ και $h(\text{int}_X(A))$ είναι ανοικτό στον Y .
Επεται ότι $h(\text{int}_X(A)) \subseteq \text{int}_Y(h(A))$

Επίσης $h^{-1}(\text{int}_Y(h(A))) \subseteq h^{-1}(h(A)) = A$
Το $h^{-1}(\text{int}_Y(h(A)))$ είναι ανοικτό, άρα
 $h^{-1}(\text{int}_Y(h(A))) \subseteq \text{int}_X(A)$ επομένως
 $\text{int}_Y(h(A)) \subseteq h(\text{int}_X(A))$

Άρα $h(\text{int}_X(A)) = \text{int}_Y(h(A))$

Απόδειξη Πρότασης

$$\begin{aligned}\text{Θέλαμε } \text{ri}(S) &= \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i : \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in (0,1), \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_i - x_0) + x_0 : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in (0,1), \sum_{i=1}^k \lambda_i < 1 \right\}\end{aligned}$$

Απο το Λήμμα 1 η απεικόνιση $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \text{aff}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$
με $h(c_1, \dots, c_k) = \sum_{i=1}^k c_i (x_i - x_0) + x_0$ είναι ομοιομορφισμός.

Επίσης, $h(\Sigma) = S$ εξ' ορισμού

Απο το Λήμμα 3: $\text{ri}(S) = h(\Sigma^\circ)$

Ξεκινήσαμε στο προηγούμενο μάθημα να αποδεικνύουμε την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση: Έστω $S = \text{conv}(\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\})$ ένα k -simplex στον $\mathbb{R}^d$, δηλαδή τα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$ είναι $k + 1$ αφοινικά ανεξάρτητα σημεία του $\mathbb{R}^d$, όπου $k \in \mathbb{N}$ (δηλαδή $k \geq 1$). Τότε

$$\begin{aligned} \text{ri}(S) &= \left\{ \sum_{i=0}^k c_i \mathbf{x}_i : c_0, c_1, \dots, c_k \in (0,1), \sum_{i=0}^k c_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in (0,1), \sum_{i=1}^k \lambda_i < 1 \right\}. \end{aligned}$$

Δείξαμε την Πρόταση χρησιμοποιώντας τα δύο λήμματα που ακολουθούν και ένα τρίτο που έλεγε ότι αν $h: X \rightarrow Y$ είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ μετρικών χώρων X και Y , τότε για κάθε $A \subseteq X$ έχουμε ότι $\text{int}_Y(h(A)) = h(\text{int}_X(A))$ (όπου $\text{int}_X(A)$ είναι το εσωτερικό του A στον μετρικό χώρο X και $\text{int}_Y(h(A))$ είναι το εσωτερικό του $h(A)$ στον μετρικό χώρο Y). Το Λήμμα αυτό αποδείχθηκε στο προηγούμενο μάθημα. Μένει λοιπόν να δείξουμε τα δύο Λήμματα που ακολουθούν.

Λήμμα 1: Έστω $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$ αφοινικά ανεξάρτητα σημεία του $\mathbb{R}^d$. Τότε η απεικόνιση $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \text{aff}(\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\})$ με τύπο

$$h(c_1, \dots, c_k) := \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0$$

είναι ομοιομορφισμός.

Λήμμα 2: Έστω $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^k$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^k$, δηλαδή $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ με το 1 στην i θέση, και έστω $\Sigma := \text{conv}(\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\})$ το κανονικό simplex στον $\mathbb{R}^k$, όπου $k \in \mathbb{N}$. Τότε το εσωτερικό του Σ είναι το

$$\Sigma^\circ = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{e}_i : c_1, \dots, c_k \in (0,1), \sum_{i=1}^k c_i < 1 \right\} = \left\{ (c_1, \dots, c_k) \in (0,1)^k : \sum_{i=1}^k c_i < 1 \right\}.$$

Απόδειξη Λήμματος 2: Έστω $V := \{(c_1, \dots, c_k) \in (0,1)^k : \sum_{i=1}^k c_i < 1\}$ το δεξί μέλος. Θα δείξουμε ότι $\Sigma^\circ = V$.

Θεωρούμε τις απεικονίσεις $\pi_1, \dots, \pi_k: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ με $\pi_i(c_1, \dots, c_k) := c_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$, και $\pi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ με $\pi(c_1, \dots, c_k) := \sum_{i=1}^k c_i$. Οι απεικονίσεις αυτές είναι όλες συνεχείς. Πράγματι, για $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)$, $\mathbf{c}' = (c'_1, \dots, c'_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$|\pi_i(\mathbf{c}) - \pi_i(\mathbf{c}')| = |c_i - c'_i| = \sqrt{(c_i - c'_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^k (c_j - c'_j)^2} = \|\mathbf{c} - \mathbf{c}'\|_2,$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, k\}$, και

$$|\pi(\mathbf{c}) - \pi(\mathbf{c}')| = \left| \sum_{i=1}^k c_i - \sum_{i=1}^k c'_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |c_i - c'_i| = \|\mathbf{c} - \mathbf{c}'\|_1 \leq \sqrt{k} \|\mathbf{c} - \mathbf{c}'\|_2$$

(η τελευταία ανισότητα από την ανισότητα Cauchy–Schwartz—βλέπε Άσκηση 7 1^{ου} φυλλαδίου Ασκήσεων). Αυτές οι ανισότητες δείχνουν όχι μόνο ότι οι $\pi_1, \dots, \pi_k$ και π είναι συνεχείς, αλλά ότι είναι και Lipschitz. Από την συνέχεια αυτών των συναρτήσεων έπεται ότι τα σύνολα $\pi_i^{-1}((0,1))$, $i \in \{1, \dots, k\}$, και $\pi^{-1}((-\infty, 1))$ είναι ανοικτά, ως αντίστροφες εικόνες ανοικτών κάτω από συνεχείς απεικονίσεις, και επομένως το

$$V = \bigcap_{i=1}^k \pi_i^{-1}((0,1)) \cap \pi^{-1}((-\infty, 1))$$

είναι ανοικτό ως πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων. Επειδή δε επιπλέον

$$\begin{aligned} V &\subseteq \left\{ \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{e}_i : c_1, \dots, c_k \in [0,1], \sum_{i=1}^k c_i \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{e}_i + \lambda_0 \mathbf{0} : \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0,1], \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\} = \Sigma, \end{aligned}$$

έπεται ότι $V \subseteq \Sigma^\circ$, αφού Σ° είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο Σ .

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, $\Sigma^\circ \subseteq V$, θα δείξουμε το ισοδύναμο $\Sigma \setminus V \subseteq \Sigma \setminus \Sigma^\circ$.

Έστω λοιπόν $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) \in \Sigma \setminus V$. Τότε είτε $c_i = 0$ για κάποιο $i \in \{1, \dots, k\}$, είτε $\sum_{i=1}^k c_i = 1$. Η περίπτωση όπου $c_i = 1$ για κάποιο $i \in \{1, \dots, k\}$ καλύπτεται από αυτές τις δύο γιατί αν $c_i = 1$ για κάποιο $i \in \{1, \dots, k\}$, τότε $c_j = 0$ για όλα τα υπόλοιπα $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$, αφού $\mathbf{c} \in \Sigma$ και άρα $c_1, \dots, c_k \in [0,1]$ και $\sum_{i=1}^k c_i \leq 1$. Αν $c_i = 0$ για κάποιο $i \in \{1, \dots, k\}$, θέτουμε, για κάθε $\epsilon > 0$, $\mathbf{b}(\epsilon) = (b_1(\epsilon), \dots, b_k(\epsilon))$, όπου $b_i(\epsilon) = -\frac{1}{2}\epsilon$ και $b_j(\epsilon) = c_j$ για όλα τα υπόλοιπα $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$. Τότε

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{b}(\epsilon)\|_2 = \sqrt{\sum_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}} |c_j - b_j(\epsilon)|^2 + |c_i - b_i(\epsilon)|^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$$

και άρα $\mathbf{b}(\epsilon) \in U_2(\mathbf{c}, \epsilon)$, την ανοικτή μπάλα κέντρου $\mathbf{c}$ και ακτίνας ϵ , αλλά $\mathbf{b}(\epsilon) \notin \Sigma$ αφού $b_i(\epsilon) = -\frac{1}{2}\epsilon < 0$. Δηλαδή $\mathbf{b}(\epsilon) \in U_2(\mathbf{c}, \epsilon) \setminus \Sigma$. Αυτό δείχνει ότι καμία μπάλα με κέντρο το $\mathbf{c}$ και θετική ακτίνα δεν περιέχεται ολόκληρη στο Σ και άρα $\mathbf{c} \notin \Sigma^\circ$, οπότε $\mathbf{c} \in \Sigma \setminus \Sigma^\circ$. Όμοια, αν $\sum_{i=1}^k c_i = 1$, θέτουμε, για κάθε $\epsilon > 0$, $\mathbf{b}(\epsilon) = (b_1(\epsilon), \dots, b_k(\epsilon))$, όπου $b_1(\epsilon) = c_1 + \frac{1}{2}\epsilon$ και $b_j(\epsilon) = c_j$ για όλα τα υπόλοιπα $j \in \{2, \dots, k\}$. Τότε

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{b}(\epsilon)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=2}^k |c_j - b_j(\epsilon)|^2 + |c_1 - b_1(\epsilon)|^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$$

και άρα $\mathbf{b}(\epsilon) \in U_2(\mathbf{c}, \epsilon)$, πάλι, αλλά $\mathbf{b}(\epsilon) \notin \Sigma$ αφού

$$\sum_{i=1}^k b_i(\epsilon) = \sum_{i=2}^k b_i(\epsilon) + b_1(\epsilon) = \sum_{i=2}^k c_i + c_1 + \frac{1}{2}\epsilon = \sum_{i=1}^k c_i + \frac{1}{2}\epsilon = 1 + \frac{1}{2}\epsilon > 1.$$

Δηλαδή πάλι $\mathbf{b}(\epsilon) \in U_2(\mathbf{c}, \epsilon) \setminus \Sigma$ και αυτό δείχνει και πάλι ότι καμία μπάλα με κέντρο το $\mathbf{c}$ και θετική ακτίνα δεν περιέχεται ολόκληρη στο Σ και άρα $\mathbf{c} \notin \Sigma^\circ$, οπότε $\mathbf{c} \in \Sigma \setminus \Sigma^\circ$. $\square$

Για την απόδειξη του Λήμματος 1 θα χρειαστούμε δύο άλλα λήμματα.

Λήμμα 4: Έστω $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ αффινική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, όπου δηλαδή ο A είναι $n \times m$ πίνακας και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Τότε η T είναι συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ τα οποία θεωρούμε διανύσματα στήλες σε αυτόν τον συμβολισμό για την T :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\|_2 &= \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m A_{1j}(x_j - y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m A_{mj}(x_j - y_j) \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m A_{ij}(x_j - y_j) \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m A_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2 \right)} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij}^2} = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij}^2}, \end{aligned}$$

η ανισότητα από την ανισότητα Cauchy–Schwartz. Αυτό δείχνει ότι όχι μόνο η T είναι συνεχής, αλλά είναι και Lipschitz, με σταθερά $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij}^2}$. □

Λήμμα 5: Αν $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m]$ ένας $n \times m$ πίνακας με στήλες τα διανύσματα στήλες $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ και οι στήλες $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ του X είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε ο τετραγωνικός $m \times m$ πίνακας $X'X$, όπου X' ο ανάστροφος του X , είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$X'X = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m \rangle \end{pmatrix} = (\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle)_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$$

είναι ο πίνακας με στοιχεία τα εσωτερικά γινόμενα των στηλών του αρχικού πίνακα X (αυτό το βλέπει κανείς με απευθείας υπολογισμό και είναι άμεσο). Για να αποδείξουμε ότι ο πίνακας αυτός είναι αντιστρέψιμος, αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Έστω λοιπόν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1 \rangle \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_2 \rangle \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_m \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m \rangle \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Αυτό ισοδυναμεί με το σύστημα εξισώσεων

$$\lambda_1 \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_2 \rangle + \cdots + \lambda_m \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

και από την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου ως προς την δεύτερη μεταβλητή, αυτό ισοδυναμεί με τις

$$\langle \mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{x}_j \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Πολλαπλασιάζοντας κάθε μία με το αντίστοιχο λ_i και προσθέτοντας, και χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου ως προς την πρώτη μεταβλητή τώρα, παίρνουμε ότι

$$\left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{x}_j \right\rangle = 0,$$

δηλαδή ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}_i \right\|_2^2 = 0,$$

ισόδυναμα, από τις ιδιότητες της νόρμας,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Έπεται από την γραμμική ανεξαρτησία των στηλών $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ του X ότι

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$

και επομένως ο τετραγωνικός ο τετραγωνικός $m \times m$ πίνακας $X'X$ είναι αντιστρέψιμος. $\square$

Απόδειξη Λήμματος 1: Υποθέτουμε καταρχήν ότι, $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή ότι $k \geq 1$. Η περίπτωση $k = 0$ είναι τετριμμένη, αφού τότε το $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ και το $\text{aff}(\{\mathbf{x}_0\})$ είναι μονοσύνολο.

Η απόδειξη συνίσταται από τέσσερα βήματα.

ΒΗΜΑ 1: Η h είναι $1 - 1$.

Πράγματι, για $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)$, $\mathbf{c}' = (c'_1, \dots, c'_k) \in \mathbb{R}^k$ έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned} h(\mathbf{c}) = h(\mathbf{c}') &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^k c'_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (c_i - c'_i) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_i - c'_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \end{aligned}$$

επειδή τα $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και αυτό επειδή τα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ και άρα η h είναι $1 - 1$.

ΒΗΜΑ 2: Η h είναι επί.

Πράγματι, έχει δειχθεί σε παλαιότερη Πρόταση ότι, επειδή τα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, κάθε στοιχείο του $\text{aff}(\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\})$ γράφεται μονοσήμαντα σαν αφφινικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$, δηλαδή, για κάθε $\mathbf{y} \in \text{aff}(\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\})$ υπάρχουν μοναδικά $c_0, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=0}^k c_i = 1$ τέτοια ώστε $\mathbf{y} = \sum_{i=0}^k c_i \mathbf{x}_i$. Τότε όμως, επειδή

$$c_0 = 1 - \sum_{i=1}^k c_i,$$

έπεται ότι

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{x}_i + \left(1 - \sum_{i=1}^k c_i\right) \mathbf{x}_0 = h(c_1, \dots, c_k),$$

που δείχνει ότι η h είναι επί.

ΒΗΜΑ 3: Η h είναι συνεχής.

Πράγματι, για $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)$, $\mathbf{c}' = (c'_1, \dots, c'_k) \in \mathbb{R}^k$ έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}
|h(\mathbf{c}) - h(\mathbf{c}')| &= \left| \sum_{i=1}^k (c_i - c'_i)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^k |c_i - c'_i| \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\| && (\text{από τριγωνική ανισότητα}) \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^k |c_i - c'_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^k \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\|^2} && (\text{από ανισότητα Cauchy – Schwartz}) \\
&= \|\mathbf{c} - \mathbf{c}'\| \sqrt{\sum_{i=1}^k \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\|^2},
\end{aligned}$$

που δείχνει ότι η h είναι όχι μόνο συνεχής, αλλά Lipschitz με σταθερά $\sqrt{\sum_{i=1}^k \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\|^2}$.

ΒΗΜΑ 4: Η h^{-1} είναι συνεχής.

Για να το δείξουμε αυτό βρίσκουμε πρώτα έναν τύπο για την h^{-1} . Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$(1) \quad \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$$

για αυθαίρετο $\mathbf{x} \in \text{aff}(\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\})$, ως προς $c_1, \dots, c_k$. Αυτή είναι μία διανυσματική εξίσωση που αντιστοιχεί σε ένα σύστημα απλών εξισώσεων. Αν γράψουμε τα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ και το $\mathbf{x}$ σαν διανύσματα στήλες πάλι,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \quad \text{και} \quad \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_i(1) \\ \vdots \\ x_i(d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \quad \text{για} \quad i \in \{0, 1, \dots, k\},$$

τότε η παραπάνω εξίσωση (1), δηλαδή η

$$\begin{aligned}
c_1 \begin{pmatrix} x_1(1) - x_0(1) \\ \vdots \\ x_1(d) - x_0(d) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2(1) - x_0(1) \\ \vdots \\ x_2(d) - x_0(d) \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} x_k(1) - x_0(1) \\ \vdots \\ x_k(d) - x_0(d) \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} x(1) - x_0(1) \\ \vdots \\ x(d) - x_0(d) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ανάγεται στο παρακάτω σύστημα d εξισώσεων με k αγνώστους (τα $c_1, \dots, c_k$):

$$\begin{array}{ccccccc}
c_1[x_1(1) - x_0(1)] + c_2[x_2(1) - x_0(1)] + \dots + c_k[x_k(1) - x_0(1)] & = & x(1) - x_0(1) \\
\vdots & & \vdots \\
c_1[x_1(d) - x_0(d)] + c_2[x_2(d) - x_0(d)] + \dots + c_k[x_k(d) - x_0(d)] & = & x(d) - x_0(d).
\end{array}$$

Αυτό είναι ακριβώς το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$X \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1) - x_0(1) \\ \vdots \\ x(d) - x_0(d) \end{pmatrix},$$

όπου $X := [\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0]$ ο $d \times k$ πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$. Γράφοντας και

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix},$$

η εξίσωση αυτή γίνεται $X\mathbf{c} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Πολλαπλασιάζοντας με τον ανάστροφο X' του X παίρνουμε ότι οποιαδήποτε λύση $\mathbf{c}$ του συστήματος, που ξέρουμε ότι υπάρχει από το Βήμα 2, πρέπει να ικανοποιεί την $X'X\mathbf{c} = X'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ και επομένως και την $\mathbf{c} = (X'X)^{-1}X'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, αφού από το Λήμμα 5 ο τετραγωνικός $k \times k$ πίνακας $X'X$ είναι αντιστρέψιμος. Έπεται από τα παραπάνω ότι

$$h^{-1}(\mathbf{x}) = (X'X)^{-1}X'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

για $\mathbf{x} \in \text{aff}(\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\})$.

Ο τύπος $\mathbf{x} \mapsto (X'X)^{-1}X'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ ορίζει αφφινική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^d$ στον $\mathbb{R}^k$ (αφού $(X'X)^{-1}X'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (X'X)^{-1}X'\mathbf{x} - (X'X)^{-1}X'\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, με $A = (X'X)^{-1}X'$ και $\mathbf{b} = -(X'X)^{-1}X'\mathbf{x}_0$). Από το Λήμμα 4, η αφφινική αυτή απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^d$ στον $\mathbb{R}^k$ είναι συνεχής, άρα και ο περιορισμός της στο $\text{aff}(\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\})$, που είναι η h^{-1} από τα παραπάνω, είναι και αυτός συνεχής. □

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό με περισσότερα από ένα σημεία
 Τότε $ri(K) \neq \emptyset$

- απόδειξη -

Έστω $k = \dim(K) \geq 1$. Από προηγούμενη πρόταση το K περιέχει $k+1$ αффινικά ανεξάρτητα σημεία, έστω $x_0, x_1, \dots, x_k$.

Τότε από κυρτότητα: $S := \text{conv}\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subseteq K$

$$\text{Το } \bar{x} = \frac{1}{k+1} (x_0 + x_1 + \dots + x_k) \in ri(S) \subseteq ri(K)$$

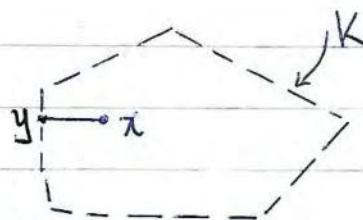
Άρα λοιπόν $ri(K) \neq \emptyset$.

Πρόταση

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σύνολο.

Έστω $x \in ri(K)$ και $y \in K$.

Τότε, $[x, y) \subseteq ri(K)$



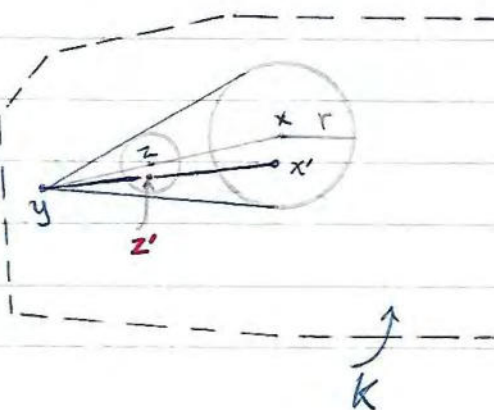
απόδειξη

Έστω $d = \dim(K)$, τότε $ri(K) \equiv \text{int}(K) = K^\circ$.

Έστω $x \in ri(K)$ και $y \in K$.

Υπάρχει λοιπόν $r > 0$ πω $U_2(x, r) \subseteq K$, όπου $U_2(x, r)$ η ανοικτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας r .

Έστω $z \in (x, y)$, δηλαδή $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ για κάποιο $\lambda \in (0, 1)$



Ισχυρισμός: $U_2(z, \lambda r) \subseteq K$

Ισχυρισμός $U_2(z, \lambda r) \subseteq K$

$\hookrightarrow$ (αποδείξη)

Έστω $z' \in U_2(z, \lambda r)$

Θεωρούμε x' τ.ω. $z' = \lambda x' + (1-\lambda)y$ με το ίδιο λ (όπως στο z και όπως στην $U_2(z, \lambda r)$). Ένα τέτοιο σημείο είναι το $x' = \frac{1}{\lambda} z' - \frac{1-\lambda}{\lambda} y$

Αν δείξουμε ότι το x' ανήκει στην μπάλα $U_2(x, r)$, τότε ως σημείο της ανοικτής μπάλας θα ανήκει και στο K . Και τότε το $z' = \lambda x' + (1-\lambda)y$ θα είναι γραμμένο ως κυρτός συνδυασμός στοιχείων του K .

Είπαμε ότι $z = \lambda x + (1-\lambda)y$

$$x = \frac{1}{\lambda} z - \frac{1-\lambda}{\lambda} y \quad (*)$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \|x' - x\|_2 &= \left\| \frac{1}{\lambda} z' - \frac{1-\lambda}{\lambda} y - x \right\|_2 \stackrel{(*)}{=} \left\| \frac{1}{\lambda} z' - \frac{1-\lambda}{\lambda} y - \frac{1}{\lambda} z + \frac{1-\lambda}{\lambda} y \right\|_2 \\ &= \frac{1}{\lambda} \|z' - z\|_2 < \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda r = r \end{aligned}$$

Άρα $x' \in U_2(x, r) \subseteq K$.

Επομένως $z' \in K$ ως κυρτός συνδυασμός των $x' \in K$ και $y \in K$.

Απο τον ισχυρισμό, έπεται ότι κάθε $z \in (x, y)$ ανήκει στο K° .

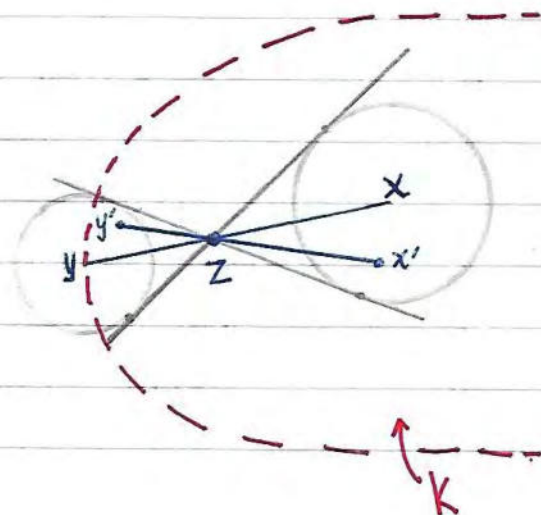
Γενική περίπτωση

Έστω $y \in \bar{K}$ και έστω $z \in (x, y)$

Τότε $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ για κάποιο $\lambda \in (0, 1)$

Ορίζουμε

$$C := \{z + \mu(z - x') : \mu \geq 0 \text{ και } x' \in U_2(x, r)\}$$



Ισχυρισμός: $y \in C$

Πράγματι, $z = \lambda x + (1-\lambda)y \iff y = \frac{1}{1-\lambda}z - \frac{\lambda}{1-\lambda}x$

$$\iff y = z + \underbrace{\frac{\lambda}{1-\lambda}}_{\mu \geq 0} (z-x)$$

Τώρα, το y είναι γραμμένο στη μορφή των στοιχείων του συνόλου $C \xrightarrow{\mu \geq 0}$
Άρα $y \in C$.

Ισχυρισμός: Το C περιέχει μπάλα γύρω από το y .

Πράγματι, $U_2(y, \frac{\lambda}{1-\lambda}r) \subseteq C$

Πράγματι, έστω $y' \in U_2(y, \frac{\lambda}{1-\lambda}r)$

Θεωρούμε x' τέτοιο ώστε

$$z = \lambda x' + (1-\lambda)y' \quad (**)$$

Ένα τέτοιο σημείο είναι το

$$x' = \frac{1}{\lambda}z - \frac{1-\lambda}{\lambda}y'$$

Θα αποδείξουμε ότι το $x' \in U_2(x, r)$.

$$\begin{aligned} \|x' - x\|_2 &= \left\| \frac{1}{\lambda}z - \frac{1-\lambda}{\lambda}y' - \frac{1}{\lambda}z + \frac{1-\lambda}{\lambda}y \right\|_2 = \frac{1-\lambda}{\lambda} \|y' - y\|_2 < \\ &< \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda} r = r \end{aligned}$$

Επομένως, $x' \in U_2(x, r)$

Επίσης, $y' = \frac{1}{1-\lambda}z - \frac{\lambda}{1-\lambda}x' = z + \underbrace{\frac{\lambda}{1-\lambda}}_{\mu \geq 0} (z - \underbrace{x'}_{U_2(x, r)})$

Άρα $y' \in C$.

Το y' ήταν τυχόν σημείο της $U_2(y, \frac{\lambda}{1-\lambda}r)$, άρα $U_2(y, \frac{\lambda}{1-\lambda}r) \subseteq C$.

Επειδή $y \in \bar{K}$, υπάρχει $y' \in K \cap U_2(y, \frac{\lambda}{1-\lambda}r)$

Επίσης, για $x' = \frac{1}{\lambda}z - \frac{1-\lambda}{\lambda}y'$ έχουμε ότι $x' \in U_2(x, r) \subseteq K^\circ$

και άρα $[x', y'] \subseteq K$ από πρώτη περίπτωση.
Επειδή $z \in [x', y']$ έπεται $z \in K^\circ$

Η γενική περίπτωση, όπου $\dim(K) = k$, όπου $k \in \{1, \dots, d\}$
επαναλαμβάνουμε την ίδια απόδειξη, αλλά θεωρούμε μπάλες
 $U_2(a, R) \cap \text{aff}(K)$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό, τότε $\text{ri}(K)$ και $\bar{K}$ είναι
κυρτά σύνολα.

(αποδείξη)

Έστω $x, y \in \text{ri}(K)$, τότε $[x, y] \subseteq \text{ri}(K)$ από Πρόταση
και άρα $[x, y] \subseteq \text{ri}(K)$

Άρα $\text{ri}(K)$ κυρτό.

Έστω $x, y \in \bar{K}$ και $\lambda \in (0, 1)$. Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$
ακολουθίες στο K π.ω. $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$.

Τότε (1) $\lambda x_n + (1 - \lambda) y_n \in K$

(2) $\lambda x_n + (1 - \lambda) y_n \rightarrow \lambda x + (1 - \lambda) y$

(1) και (2) $\implies \lambda x + (1 - \lambda) y \in \bar{K}$

Άρα $\bar{K}$ κυρτό.

ΣΥΝΔΡΑΣΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ (Καραθεοδωρή, 1907)

Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\dim S = k$. Τότε κάθε σημείο του $\text{Conv}(S)$
γραφεται σαν κυρτός συνδυασμός (το πολύ) $k+1$ στοιχείων του S .

Απόδειξη

Έστω $x \in \text{Conv}(S)$ και έστω ότι $x = \sum_{i=1}^m c_i x_i$, όπου $c_1, \dots, c_m \in [0, 1]$ και $\sum_{i=1}^m c_i = 1$ και $x_1, \dots, x_m \in S$.

Έστω ότι $m > k+1$

Θα δείξουμε ότι το x γραφεται σαν κυρτός συνδυασμός με λιγότερα από m στοιχεία του S (χρήσια λιγότερα).

Αν κάποιο $c_i = 0$, η από πάνω πρόταση αληθεύει.

Έστω ότι $c_1, \dots, c_m > 0$. Επειδή $m > k+1$, και $\dim S = k$ και $x_1, \dots, x_m \in S$, τότε αυτά είναι αφινικά εξηρημένα.

(Διότι αν ήταν αφινικά ανεξάρτητα τα $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1$ ανήκουν στο $\text{aff}(S) - x_1$ και θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητα. Όμως $\dim(\text{aff}(S) - x_1) = k$ και $m-1 > k$. Αυτό είναι άτοπο.)

Άρα υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν, τ.ω.

$\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$ και $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0$. Αν ήταν όλα τα $\lambda_i = 0$ τότε τα $x_1, \dots, x_m$ θα ήταν αφινικά ανεξάρτητα.

Ορίζουμε $I_m = \{1, 2, \dots, m\} = [m]$.

και $I_m^+ = \{i \in I_m : \lambda_i > 0\}$, τότε το $I_m^+ \neq \emptyset$, επειδή τα λ_i δεν είναι όλα μηδέν και έχουν άθροισμα 0.

Ορίζουμε $I_m^- = I_m \setminus I_m^+$

Υπάρχει $i^* \in I_m^+$ τ.ω.

$$\frac{c_{i^*}}{\lambda_{i^*}} = \min \left\{ \frac{c_i}{\lambda_i} : i \in I_m^+ \right\} = r > 0$$

Ορίζουμε $b_i = c_i - r \lambda_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$

Αν $i \in I_m^+$, τότε $b_i = c_i - r \lambda_i \geq c_i - \frac{c_i}{\lambda_i} \cdot \lambda_i = 0$

Αν $i \in I_m^-$, τότε $b_i = c_i - r\lambda_i \geq c_i > 0$

Τέλος $b_{i^*} = 0$ $\left(b_{i^*} = c_{i^*} - r\lambda_{i^*} = c_{i^*} - \frac{c_{i^*}}{\lambda_{i^*}} \lambda_{i^*} = 0 \right)$

Παρατηρούμε ότι $\sum_{i=1}^m b_i = \sum_{i=1}^m c_i - r \sum_{i=1}^m \lambda_i = \sum_{i=1}^m c_i = 1$

και επίσης, $\sum_{i=1}^m b_i x_i = \sum_{i=1}^m c_i x_i - r \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^m c_i x_i = x$

Αρα γράψαμε το x σαν κυρτό συνδυασμό $m-1$ στοιχείων του S , συγκεκριμένα των $\{x_i : i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i^*\}\}$.

Αυτό μπορεί να συνεχιστεί μέχρι να μείνουν $k+1$ σημεία από τα x_i (γιατί όσο είναι περισσότερα από $k+1$, θα είναι αφηρικά εξηρημένα).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν $S \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε κάθε στοιχείο του $\text{Conv}(S)$ γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός (το πολύ) $d+1$ στοιχείων του S .

Παρατήρηση: Το θεώρημα του Καραθεοδωρή δεν βελτιώνεται, παράδειγμα το k -simplex.

Άσκηση: Αν το $C \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κλειστό, τότε το $\text{Conv}(C)$ μπορεί να μην είναι κλειστό.

Άσκηση: Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοικτό, τότε $\text{Conv}(A)$ είναι επίσης ανοικτό.

Πρόταση (Εφαρμογή Καραθεοδωρή)

Αν $C \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές, τότε $\text{Conv}(C)$ είναι συμπαγές.

Παρατήρηση: Αυτό δεν ισχύει για απειροδιάστατους γραμμικούς τοπολογικούς χώρους.

Απόδειξη πρότασης

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $\text{conv}(C)$. Θα δείξουμε ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο $\text{conv}(C)$ και θα έπεται η συμπαγεία του $\text{conv}(C)$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_d^{(n)} \in C$ και $\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_d^{(n)} \in [0, 1]$ με $\sum_{i=0}^d \lambda_i^{(n)} = 1$ τ.ω.

$$x_n = \sum_{i=0}^d \lambda_i^{(n)} x_i^{(n)}$$

Η $(x_0^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο C το οποίο είναι συμπαγές άρα υπάρχει $k_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα τ.ω. η υπακολουθία $(x_0^{k_0(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in C$

Επειδή η ακολουθία $y_i^{(n)} = x_i^{k_0(n)}$ περιέχεται στο C υπάρχει μία $k_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα τ.ω. η υπακολουθία $(y_i^{k_1(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (x_i^{k_0 \circ k_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει σε κάποιο $x_i \in C$.

Συνεχίζοντας βρίσκουμε τελικά $k_d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τ.ω. η υπακολουθία $(x_d^{k_0 \circ k_1 \circ \dots \circ k_d(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $x_d \in C$

Τότε, για την $k(n) = k_0 \circ k_1 \circ \dots \circ k_d(n)$ έχουμε ότι $x_i^{k(n)} \rightarrow x_i$ για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, d\}$

Ακριβώς ίδια, από συμπαγεία του $[0, 1]$ υπάρχουν γνησίως αύξουσες $m_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τ.ω. $\lambda_i^{m_0 \circ m_1 \circ \dots \circ m_d(n)} \rightarrow \lambda_i$ για κάποιο $\lambda_i \in [0, 1]$ για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, d\}$

Έστω $m(n) = m_0 \circ m_1 \circ \dots \circ m_d \circ k(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\lambda_i^{m(n)} \rightarrow \lambda_i \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, d\}$
 $x_i^{m(n)} \rightarrow x_i \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, d\}$

Άρα

$$x_{m(n)} = \sum_{i=0}^d \lambda_i^{(m(n))} x_i^{(m(n))} \rightarrow \sum_{i=0}^d \lambda_i x_i$$

Όπως τα $x_0, x_1, \dots, x_d \in C$

Επιπλέον $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, d\}$ ως όρια δευτεριών ακολουθιών

$$\sum_{i=0}^d \lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^d \lambda_i^{(m(n))} = 1$$

Άρα $\sum_{i=0}^d \lambda_i x_i \in \text{Conv}(C)$

Επομένως δείξαμε ότι η υπακολουθία της $(x_{m(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει με όριο στο $\text{Conv}(C)$

Έπεται όπως ειπώθηκε ότι το $\text{Conv}(C)$ είναι συμπαγές.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑΥπενθύμιση:**Θεώρημα Καραθεοδωρή**

Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\dim S = k$. Τότε κάθε σημείο της κυρτής θήκης $\text{Conv}(S)$ γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός (το πολύ) $k+1$ στοιχείων του S .

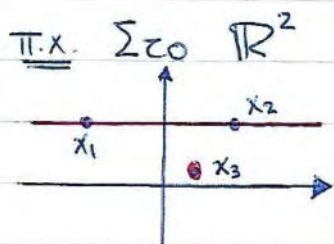
Σχόλιο: Το θεώρημα αυτό μας εξασφαλίζει ένα άνω φράγμα για τον αριθμό στοιχείων του S που απαιτούνται ώστε να γραφεί ένα τυχόν σημείο της κυρτής θήκης $\text{Conv}(S)$ ως κυρτός συνδυασμός αυτών.

Θεώρημα Radon [1921]

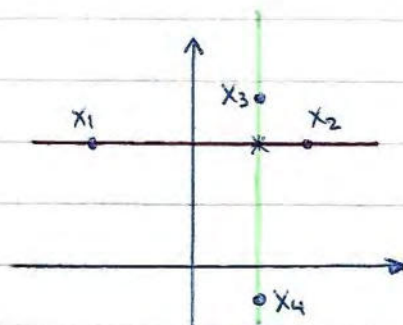
Έστω $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ διακεκριμένα με $m > d+1$. Τότε το σύνολο $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ μπορεί να διαμεριστεί σε $I_m^{(1)}, I_m^{(2)}$ έτσι ώστε

$$\text{Conv}(\{x_i : i \in I_m^{(1)}\}) \cap \text{Conv}(\{x_i : i \in I_m^{(2)}\}) \neq \emptyset$$

Παρατήρηση: Το θεώρημα αυτό είναι βέλτιστο όσον αφορά την συνθήκη $m > d+1$

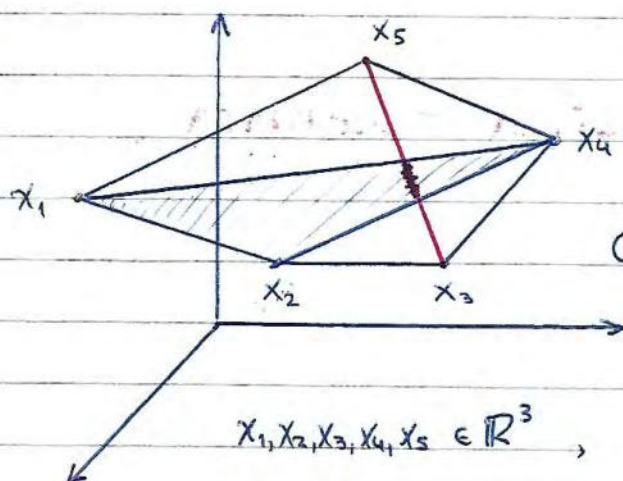


Για τρία σημεία στο επίπεδο
δηλαδή, δεν ισχύει



Ισχύει όμως για 4 σημεία.

π.χ. $\sum_{\text{conv}} \mathbb{R}^3$



$$5 = m > k+1 = 4$$

$$\text{Conv}(\{x_1, x_2, x_4\}) \cap \text{Conv}(\{x_3, x_5\}) \neq \emptyset$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}^3$, συνεπίπεδα

Απόδειξη

Επειδή $m > d+1$, τότε τα $x_1, \dots, x_m$ είναι αффινικά εξηρημένα.

Άρα υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0 \quad (*)$$

Θέτουμε $I_m^{(1)} = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} : \lambda_i > 0\}$. Τότε $I_m^{(1)} \neq \emptyset$.

Θέτουμε $I_m^{(2)} = I_m \setminus I_m^{(1)}$, όπου επίσης $I_m^{(2)} \neq \emptyset$.

Έστω $\lambda = \sum_{i \in I_m^{(1)}} \lambda_i > 0$

Τότε $\sum_{j \in I_m^{(2)}} (-\lambda_j) = \lambda > 0$.

Θέτουμε $x = \sum_{i \in I_m^{(1)}} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ όπου $\frac{\lambda_i}{\lambda} > 0 \quad \forall i \in I_m^{(1)}, \quad \sum_{i \in I_m^{(1)}} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$

Άρα το $x \in \text{Conv}(\{x_i : i \in I_m^{(1)}\})$

Επίσης, $-\frac{\lambda_j}{\lambda} \geq 0$ για $j \in I_m^{(2)}$ και $\sum_{j \in I_m^{(2)}} \frac{-\lambda_j}{\lambda} = 1$

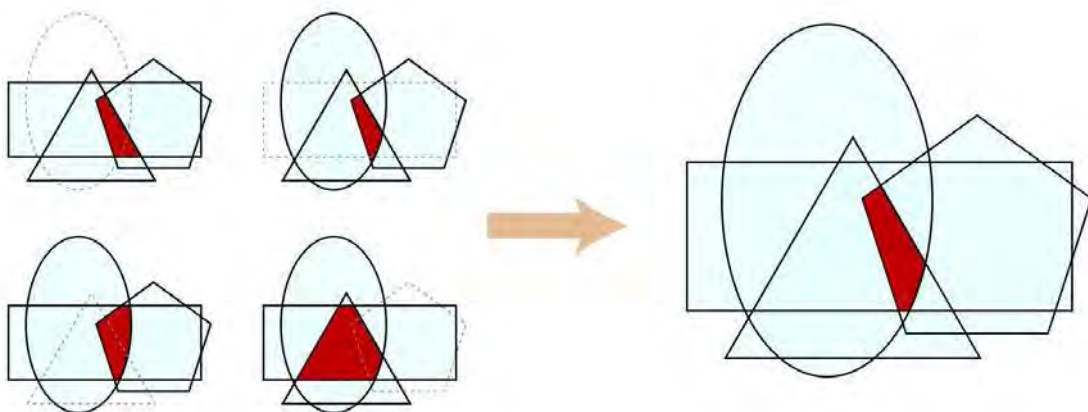
Τέλος, από (*) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \sum_{i \in I_m^{(1)}} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + \sum_{j \in I_m^{(2)}} \frac{\lambda_j}{\lambda} x_j = \\
 &= x + \sum_{j \in I_m^{(2)}} \frac{\lambda_j}{\lambda} x_j
 \end{aligned}$$

Αρα $x = \sum_{j \in I_m^{(2)}} \frac{-\lambda_j}{\lambda} x_j \in \text{Conv}(\{x_j : j \in I_m^{(2)}\})$

Αρα $x \in \text{Conv}(\{x_i : i \in I_m^{(1)}\}) \cap \text{Conv}(\{x_j : j \in I_m^{(2)}\})$

Θεώρημα Helly (1) (1923 η δημοσίευση, αλλά είχε αποδειχτεί το 1913)
 Έστω $K_1, \dots, K_m \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτά σύνολα με $m \geq d+1$ τ.ω.
 οποιοδήποτε $d+1$ από αυτά τέμνονται.
 Τότε $\bigcap_{i=1}^m K_i \neq \emptyset$



Το θεώρημα Helly στο Ευκλείδιο επίπεδο

Απόδειξη

Για $m = d+1$ σύνολα ισχύει από την υπόθεση.

Έστω $m > d+1$. Έστω ότι για οποιαδήποτε οικογένεια με λιγότερα από m κυρτά σύνολα τ.ω. οποιαδήποτε $d+1$ από αυτά έχουν κοινό σημείο, ισχύει ότι η τομή τους είναι μη κενή (επαγωγική υπόθεση)

Έστω $K_1, \dots, K_m \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτά σύνολα τ.ω. οποιαδήποτε $d+1$ από αυτά έχουν κοινό σημείο. Τότε, για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει $x_i \in \bigcap_{j \in I_m \setminus \{i\}} K_j$ όπου $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$

Αν $x_i = x_j$ για $i \neq j$ έχουμε ότι $x_i \in \bigcap_{j \in I_m \setminus \{i\}} K_j$ και

επίσης $x_i = x_j \in \bigcap_{l \in I_m \setminus \{j\}} K_l \subseteq K_i$

Αρα $x_i \in \bigcap_{i=1}^m K_i$.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα x_i είναι όλα διαφορετικά. Επειδή $m > d+1$ υπάρχει από το προηγούμενο θεώρημα (Radon) διαμέριση $I_m^{(1)}, I_m^{(2)}$ του I_m τ.ω.

$$\text{Conv}(\{x_i : i \in I_m^{(1)}\}) \cap \text{Conv}(\{x_j : j \in I_m^{(2)}\}) \neq \emptyset$$

Παρατηρούμε ότι: $x_j \in \bigcap_{l \in I_m \setminus \{j\}} K_l \subseteq \bigcap_{i \in I_m^{(1)}} K_i$ για $j \in I_m^{(2)}$

και όμοια $x_i \in \bigcap_{l \in I_m \setminus \{i\}} K_l \subseteq \bigcap_{j \in I_m^{(2)}} K_j$ για $i \in I_m^{(1)}$

Επειδή η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό επεται ότι:

$$\text{Conv}(\{x_i : i \in I_m^{(1)}\}) \subseteq \bigcap_{j \in I_m^{(2)}} K_j \quad \text{και} \quad \text{Conv}(\{x_j : j \in I_m^{(2)}\}) \subseteq \bigcap_{i \in I_m^{(1)}} K_i$$

$$\text{Αρα } \emptyset \neq \text{Conv}(\{x_i : i \in I_m^{(1)}\}) \cap \text{Conv}(\{x_i : i \in I_m^{(2)}\}) \subseteq \bigcap_{j \in I_m^{(2)}} K_j \cap \bigcap_{j \in I_m^{(1)}} K_j$$

$$\stackrel{11}{=} \bigcap_{j=1}^m K_j \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση: Το θεώρημα του Helly δεν ισχύει για άπειρες οικογένειες χωρίς επιπλέον υποθέσεις.

Π.χ.

$$\bullet K_n = [n, +\infty), n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet K_n = (0, n^{-1}), n \in \mathbb{N}$$

Και στα δύο παραδείγματα, οποιαδήποτε πεπερασμένη συλλογή τέτοιων συνόλων έχουν μη κενή τομή, όμως

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$$

Θεώρημα Helly (2)

Έστω $K_i \subseteq \mathbb{R}^d$, $i \in I$, κυρτά και συμπαγή, όπου το I είναι αυθαίρετο σύνολο δεικτών. Αν οποιαδήποτε $d+1$ από αυτά έχουν κοινό σημείο, τότε

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το I είναι άπειρο.

Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο $J \subseteq I$ ισχύει ότι

$$\bigcap_{i \in J} K_i \neq \emptyset$$

Πράγματι, αυτό ισχύει από υπόθεση αν το J έχει πληθυσμό

το πολύ $d+1$, και από το Θεώρημα του Helly αλλιώς.

Εστω ότι $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$. (και θα καταλήξουμε σε άτοπο)

Τότε $\forall i \in I$ έχουμε ότι: $K_i \cap \bigcap_{j \in I - \{i\}} K_j = \emptyset$

Δηλαδή $K_i \subseteq \bigcup_{j \in I - \{i\}} K_j^c$. Σταθεροποιούμε ένα $i \in I$.

Από σύμπαχια, υπάρχουν $j_1, j_2, \dots, j_m \in I - \{i\}$ τ.ω.

$K_i \subseteq K_{j_1}^c \cup \dots \cup K_{j_m}^c$, δηλαδή $K_i \cap K_{j_1} \cap \dots \cap K_{j_m} = \emptyset$

Ατοπο, επειδή $\bigcap_{j \in J} K_j \neq \emptyset$ για οποιοδήποτε πεπερασμένο $J \subseteq I$.

Άρα,

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset.$$



Παρατήρηση:

Το Θεώρημα Helly (2) ισχύει και όταν μόνο ένα από τα K_i είναι σύμπαχες και τα υπόλοιπα κλειστά.

ΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος, λέγεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο αν υπάρχει συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- (1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ και $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in X$
- (3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in X$
- (4) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in X$

Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται εσωτερικό γινόμενο.

Κάθε εσωτερικό γινόμενο επαγεί μια νόρμα: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad x \in X$
Αυτή $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της νόρμας:

- i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$
- iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

Παραδείγματα

$$1) \quad X = \mathbb{R}^d, \quad \text{για } x = (x_1, \dots, x_d), \quad y = (y_1, \dots, y_d) \\ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

$$2) \quad X = \ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\} \\ \langle (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_n)$$

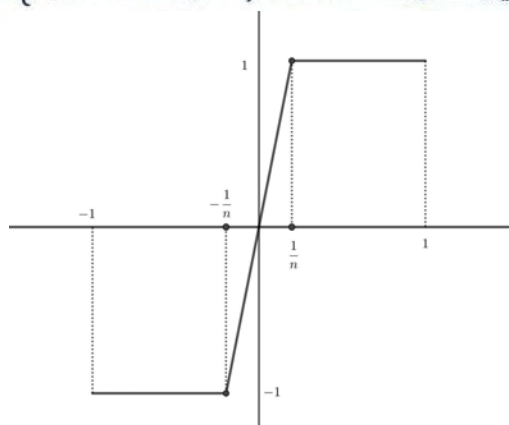
$$3) \quad X = C([-1, 1]) = \{ f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής} \} \\ \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Σε κάθε χώρο με νόρμα X , άρα και σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο η $\rho(x,y) = \|x-y\|$ είναι μετρική. Αν ο X με αυτήν την μετρική είναι πλήρης μετρικός χώρος λέμε ότι ο διανυσματικός χώρος είναι **χώρος Banach**, και ειδικά αν η μετρική, που επαίει το εσωτερικό γινόμενο σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο, είναι πλήρης, ο X λέγεται **χώρος Hilbert**.

Στα παραδείγματα, τα (1),(2) είναι χώροι Hilbert, ενώ το (3) δεν είναι.

Παράδειγμα

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \frac{1}{n} < |x| \leq 1 \\ nx & , |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$



Οι $f_n, n \in \mathbb{N}$, αποτελούν βασική ακολουθία ως προς τη μετρική που επαίει το εσωτερικό γινόμενο.

$$\|f_n - f_m\| = \sqrt{\int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } n, m \rightarrow +\infty :$$

Για $n \leq m$,

$$f_m(x) - f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \text{για } \frac{1}{n} < |x| \leq 1 \\ (m-n)x & , \text{για } |x| \leq \frac{1}{m} \\ 1-nx & , \text{για } \frac{1}{m} < |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)|^2 dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{m}} (m-n)^2 x^2 dx + 2 \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \frac{(m-n)^2}{m^3} + 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) - 4n \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2m^2} \right) + 2n^2 \left(\frac{1}{3n^3} - \frac{1}{3m^3} \right) \\ &\leq \frac{2}{3} \frac{1}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2n}{m^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{n} \leq \frac{2}{3} \frac{1}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} + \frac{2}{3} \frac{1}{n} \\ &= \frac{8}{3m} + \frac{8}{3n} \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Επίσης, για $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{για } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{για } x=0 \\ -1, & \text{για } -1 \leq x < 0 \end{cases}$

έχουμε ότι:

$$\int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 2 \int_0^{1/n} (1-nx)^2 dx = 2 \frac{1}{n} - 4n \frac{1}{2n^2} + 2n^2 \frac{1}{3n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

και η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν μπορεί να τείνει σε μία συνάρτηση στο χώρο $C([-1,1])$ (δηλαδή συνεχή) ως προς την μετρική

$$\|h - g\| = \sqrt{\int_{-1}^1 |h(x) - g(x)|^2 dx}.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1 Ιδιότητα του παραλληλογράμμου: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$
Απόδειξη

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\ &= \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle + \langle x, x-y \rangle - \langle y, x-y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

2 Ανισότητα Cauchy - Schwartz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in X$
Απόδειξη

Αν $\|x\| = 0$, τότε $x = 0$ και $\langle x, y \rangle = \langle 0, y \rangle = \langle 0, 0, y \rangle = 0 \langle 0, y \rangle = 0$

Οπότε ισχύει η ισότητα.

Όμοια αν $y = 0$.

Επίσης, η ανισότητα ισχύει όταν $\langle x, y \rangle = 0$.

Έστω $t = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\langle x, y \rangle}$, τότε

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - t \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \left\langle \frac{x}{\|x\|} - t \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} - t \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\
&= \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} + t^2 \frac{\|y\|^2}{\|y\|^2} - 2 \frac{t}{\|x\| \|y\|} \langle x, y \rangle \\
&= 1 + t^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \\
&= 2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \|y\|}
\end{aligned}$$

Άρα, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

3 Σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο, έστω $S(0,1) = \partial B(0,1)$ η επιφάνεια της μοναδιαίας μπάλας με κέντρο το μηδενικό διάνυσμα. Τότε, η $S(0,1)$ δεν περιέχει εύθυγραμμο τμήματα. Δηλαδή αν $x, y \in S(0,1)$ με $x \neq y$, υπάρχει $t \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $tx + (1-t)y \notin S(0,1)$

Απόδειξη

Έστω $x, y \in S(0,1)$ και $t = 1/2$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2} \left\| \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = 1 - \left\| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right\|^2 < 1 \quad \text{επειδή} \quad \frac{x}{2} \neq \frac{y}{2}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω (M, ρ) μετρικός χώρος. Ορίζουμε για $A \subseteq M$
 $\rho(x, A) = \inf \{ \rho(x, y) : y \in A \}$

Παρατήρηση: $\rho(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν X είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος, ένα υποσύνολο $K \subseteq X$ λέγεται κυρτό αν $\lambda x + (1-\lambda)y \in K \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \forall x,y \in K$

Θεώρημα

Έστω X χώρος Hilbert και $\emptyset \neq K \subseteq X$ κυρτό και κλειστό.

Τότε $\forall x \in X \quad \exists! y_x \in K$ τ.ω. $\text{dist}(x, K) = \|x - y_x\|$ όπου
 $\text{dist}(x, K) = \inf \{ \|x - y\| : y \in K \}$

Απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας για την νόρμα

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle|$$

$$\stackrel{c-s}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

Απόδειξη

Αν $x \in K$, τότε $\text{dist}(x, K) = 0$, τότε το $y_x = x$ είναι το μοναδικό $y \in K$ τ.ω. $\|x - y\| = \text{dist}(x, K)$

Έστω $x \notin K$. Άρα $\text{dist}(x, K) > 0$.

Υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο K , τ.ω. $\|y_n - x\| \rightarrow \text{dist}(x, K)$

$$\|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 + \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 \implies$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2$$

$$= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2$$

$$\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\text{dist}(x, K)^2$$

(επειδή από κυρτότητα $\frac{y_n + y_m}{2} \in K$ και άρα $\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\| \geq \text{dist}(x, K)$)

Αρα παίρνοντας όρια καθώς $n, m \rightarrow \infty$ παίρνουμε ότι $\|y_n - y_m\|^2 \rightarrow 0$.

Αρα η $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία και άρα από πληρότητα του X συγκλίνει σε κάποιο $y \in X$, και επειδή το K είναι κλειστό και $y_n \in K \ \forall n \in \mathbb{N}$ πρέπει $y \in K$.

$$\text{Τότε } |\|y - x\| - \|y_n - x\|| \leq \|y - y_n\| \rightarrow 0$$

$$\text{Αρα, } \|y - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| = \text{dist}(x, K)$$

Επομένως βρήκαμε ένα $y \in K$ τ.ω. $\|y - x\| = \text{dist}(x, K)$

Μοναδικότητα: Έστω $y_1, y_2 \in K$ τ.ω. $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \text{dist}(x, K)$

Έστω $r := \text{dist}(x, K) > 0$. Τότε $y_1, y_2 \in S(x, r)$

Τότε, αν $y_1 \neq y_2$ ισχύει $\left\| \frac{y_1 + y_2}{2} - x \right\| < r$ από ιδιότητα (3) γιατί $\frac{y_1 + y_2}{2} \notin S(x, r)$

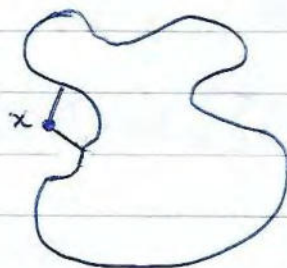
Τότε όμως $\frac{y_1 + y_2}{2} \in K$ από κυρτότητα και $\left\| \frac{y_1 + y_2}{2} - x \right\| < \text{dist}(x, K)$ άτοπο!

Αρα πρέπει $y_1 = y_2$. ■

Παρατηρήσεις:

1 Στον $\mathbb{R}^d$ γνωρίζαμε ήδη ότι η απόσταση $\text{dist}(x, K)$ υλοποιείται για κάποιο $y \in K$ όταν K κλειστό.

Δεν υλοποιείται αναγκαστικά από μοναδικό $y \in K$, αν το K δεν είναι κυρτό σύνολο.

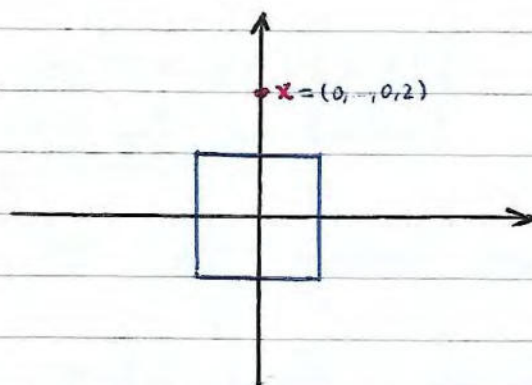


2 Αν ο X δεν είναι χώρος Hilbert, το θεώρημα δεν ισχύει.

π.χ. $X = \mathbb{R}^d$ με $\|x-y\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |x_i - y_i|$ για $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d)$

Η $B_\infty(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq 1\}$ είναι κυρτό και κλειστό σύνολο.

Αν $x = (0, 0, \dots, 0, 2)$, τότε
 $\text{dist}(x, B_\infty(0,1)) = 1 = \|x-y\|_\infty$
 $\forall y = (y_1, \dots, y_{d-1}, 1)$ με $|y_i| \leq 1$
 $\forall i \in \{1, \dots, d-1\}$



3 Μπορεί η απόσταση $\text{dist}(x,K)$ να μην υλοποιείται για K κλειστό και κυρτό αν ο X δεν είναι χώρος Hilbert.

π.χ. $\ell^1(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$
 Νόρμα $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$

Έστω $K = \{(t_n(1 + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}} : t_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\}$

Το K είναι κυρτό:

Έστω $(s_n(1 + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ και $(t_n(1 + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθίες στο K και $\lambda \in [0,1]$.

$$\lambda \left(s_n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} + (1-\lambda) \left(t_n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left[\lambda s_n + (1-\lambda)t_n \right] \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

και

$$\lambda s_n + (1-\lambda)t_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\lambda s_n + (1-\lambda)t_n] = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s_n + (1-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Άρα, $\lambda \left(s_n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} + (1-\lambda) \left(t_n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \in K$

Το K είναι επίσης κλειστό :

Έστω $\left(t_j^{(n)} \left(1 + \frac{1}{j} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο K , που συγκλίνει στον χώρο $\ell^1(\mathbb{N})$, δηλαδή υπάρχει $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ που ανήκει στον $\ell^1(\mathbb{N})$ τέτοια ώστε

$$\left\| \left(t_j^{(n)} \left(1 + \frac{1}{j} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} - (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \right\| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| t_j^{(n)} \left(1 + \frac{1}{j} \right) - x_j \right| \rightarrow 0$$

Τότε

$$t_j^{(n)} \left(1 + \frac{1}{j} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Έστω $t_j = \frac{x_j}{1 + \frac{1}{j}}$, $j \in \mathbb{N}$, τότε $t_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$, γιατί

$$t_j^{(n)} \left(1 + \frac{1}{j} \right) \geq 0 \quad \forall j, n \in \mathbb{N}, \quad \text{άρα} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Επίσης, $x_j = t_j \left(1 + \frac{1}{j} \right) \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} t_j &= \sum_{j=1}^{\infty} t_j - \sum_{j=1}^{\infty} t_j^{(n)} + 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{1 + \frac{1}{j}} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_j^{(n)} \left(1 + \frac{1}{j} \right)}{1 + \frac{1}{j}} + 1 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j - t_j^{(n)} \left(1 + \frac{1}{j} \right)}{1 + j^{-1}} + 1. \end{aligned}$$

Όμως $\left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j - t_j^{(n)} \left(1 + \frac{1}{j} \right)}{1 + j^{-1}} \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - t_j^{(n)} \left(1 + \frac{1}{j} \right)| \rightarrow 0$.

Άρα $\sum_{j=1}^{\infty} t_j = 1$. Δείξαμε ότι $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in K$.

Έπεται ότι το K είναι κλειστό.

$$K = \overline{\text{conv}(\{e_i(1+\frac{1}{j}) : j \in \mathbb{N}\})} \quad \text{όπου } e_j = (0, \dots, 0, \overset{j \text{ θέση}}{\underset{\downarrow}{1}}, 0, \dots, 0)$$

$$\text{Καταρχήν } \|x\| > 1 \quad \forall x \in K \quad \left[\sum_{j=1}^{\infty} t_j \left(1 + \frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_j}{j} > \sum_{j=1}^{\infty} t_j = 1 \right]$$

$$\text{Άρα } \|x-0\| > 1 \quad \forall x \in K.$$

$$\text{Θα δείξουμε ότι } \text{dist}(0, K) = 1 < \|x-0\| \quad \forall x \in K.$$

$$\text{Θεωρούμε } 0 < t < 1 \text{ και ορίσουμε } t_j = t^{j-1}(1-t), \quad j \in \mathbb{N}$$

$$\text{Τότε,} \\ \left(t_j \left(1 + \frac{1}{j}\right) \right)_{j \in \mathbb{N}} \in K$$

$$\begin{aligned} \text{και} \\ \left\| t_j \left(1 + \frac{1}{j}\right)_{j \in \mathbb{N}} \right\| &= \sum_{j=1}^{\infty} t_j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_j}{j} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}(1-t)}{j} \\ &= 1 + \frac{1-t}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j} = 1 - \frac{1-t}{t} \ln(1-t) \xrightarrow{\text{καθώς } t \uparrow 1} 1 \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι η απόσταση $\text{dist}(0, K) = 1$, γιατί βρίσκουμε στοιχείο $x_t = \left((t-1)t^{j-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right) \right)_{j \in \mathbb{N}}$ του K με απόσταση όσο κοντά θέλουμε στο 1.

Θεώρημα:

Έστω X χώρος Hilbert, $\emptyset \neq K \subseteq X$ κυρτό και κλειστό, $x \in X$.

Τότε $\exists! y_x \in K$ τ.ω.

$$\|x - y_x\| = \text{dist}(x, K) = \inf\{\|x - y\| : y \in K\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X χώρος Hilbert, και $K \neq \emptyset$ κυρτό και κλειστό με $K \subseteq X$. Ορίζεται $P_K : X \rightarrow K$ ως εξής:

$$P_K(x) = y_x$$

όπου y_x είναι το μοναδικό σημείο του K που αντιστοιχεί στο x , από το προηγούμενο Θεώρημα.

Η P_K λέγεται μετρική προβολή στο K .

Παρατηρήσεις:

1] Για $x \in K$, $P_K(x) = x$

2] $P_K(X \setminus K) = \partial K$

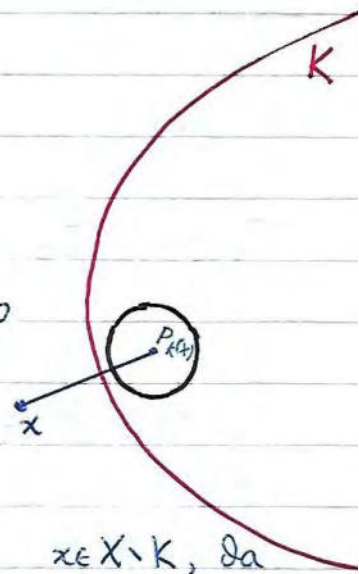
↳ Απόδειξη (εις άστονον απαγωγή)

Για $x \in X \setminus K$, αν $P_K(x)$ ήταν εσωτερικό σημείο του K , τότε θα υπήρχε σημείο

$(1-t)P_K(x) + tx \in K$ με $t > 0$ και τότε

$$\|y_t - x\| < \|x - P_K(x)\| \quad \leftarrow \text{ΑΤΟΠΟ.}$$

Πράγματι, αν το $P_K(x)$ ήταν εσωτερικό σημείο του K για κάποιο $x \in X \setminus K$, θα υπήρχε $\delta > 0$ τ.ω. $U_2(P_K(x), \delta) \subseteq K$. Τότε θα είχαμε ότι $(1-t)P_K(x) + tx \in U_2(P_K(x), \delta) \subseteq K$ για οποιοδήποτε $0 < t < \frac{\delta}{\|x - P_K(x)\|}$, αφού $\|(1-t)P_K(x) + tx - P_K(x)\| = \|t(x - P_K(x))\| = t\|x - P_K(x)\| < \delta$ και επίσης θα είχαμε ότι $\|(1-t)P_K(x) + tx - x\| = (1-t)\|P_K(x) - x\| < \|P_K(x) - x\|$ που είναι άτοπο!



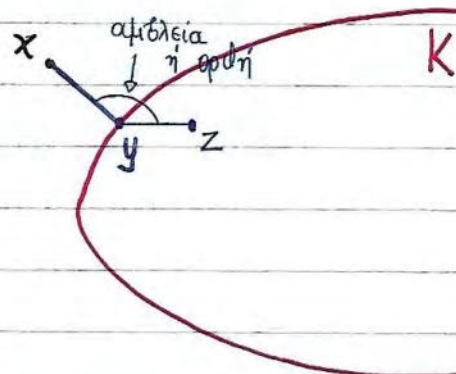
Θεώρημα [Χαρακτηρισμός Μετρικής Προβολής]

Έστω X χώρος Hilbert, $\emptyset \neq K \subseteq X$ κλειστό και κυρτό, $x \in X$ και $y \in K$.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

$$(1) \quad y = P_K(x)$$

$$(2) \quad \langle x-y, z-y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in K$$



A' Περίπτωση $x \in K$

απόδειξη $(1) \Rightarrow (2)$

Τότε $y = x = P_K(x)$, άρα $\langle x-y, z-y \rangle = \langle x-x, z-y \rangle = 0 \leq 0$
 $\forall z \in K$.

απόδειξη $(2) \Rightarrow (1)$

Αν $\langle x-y, z-y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in K$, τότε για $z = x$

θα ισχύει:

$$\langle x-y, x-y \rangle \leq 0$$

$$\|x-y\|^2 \leq 0$$

$$y = x = P_K(x)$$

B' Περίπτωση $x \in X \setminus K$

απόδειξη $(1) \Rightarrow (2)$

Έστω $z_t = P_K(x) + t(z - P_K(x))$, όπου $z \in K$, $t \in (0,1)$

Τότε $z_t \in K$.

$$\text{Άρα } \|x - P_K(x)\|^2 \leq \|x - z_t\|^2 = \|x - P_K(x) - t(z - P_K(x))\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\|x - P_K(x)\|^2 \leq \|x - P_K(x)\|^2 + t^2 \|z - P_K(x)\|^2 - 2t \langle x - P_K(x), z - P_K(x) \rangle \Leftrightarrow$$

$$2t \langle x - P_K(x), z - P_K(x) \rangle \leq t^2 \|z - P_K(x)\|^2$$

$$\langle x - P_K(x), z - P_K(x) \rangle \leq \frac{t}{2} \|z - P_K(x)\|^2$$

Παίρνουμε $t \downarrow 0$ και έχουμε ότι: $\langle x - P_K(x), z - P_K(x) \rangle \leq 0$.

απόδειξη (2) $\Rightarrow$ (1)

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x-y, z-y \rangle + \langle x-y, x-z \rangle$$

$$\stackrel{(1)}{\leq} \langle x-y, x-z \rangle$$

$$\stackrel{C-S}{\leq} \|x-y\| \|x-z\|$$

($\|x-y\| \neq 0$ αφού $x \in X \setminus K$ και $y \in K$)

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| \quad \forall z \in K$$

$$\text{Αρα } \|x-y\| = \inf \{ \|x-z\| : z \in K \}$$

$$\text{Αρα } y = P_K(x)$$

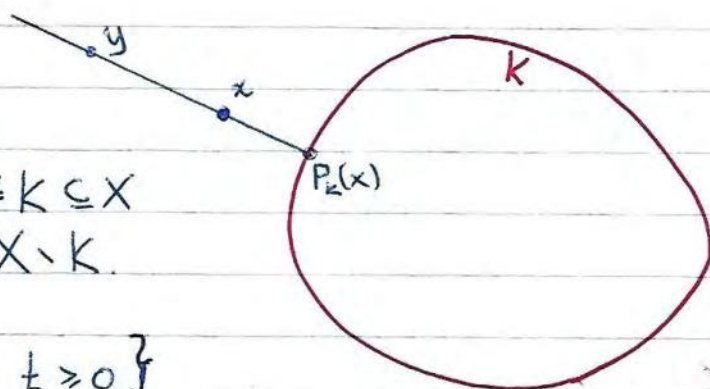
Πορίσμα:

Έστω X χώρος Hilbert, $\emptyset \neq K \subseteq X$
κυρτό και κλειστό και $x \in X \setminus K$.

Ορίζουμε

$$L_x = \{ P_K(x) + t(x - P_K(x)) : t \geq 0 \}$$

$$\text{Τότε, } P_K(y) = P_K(x) \quad \forall y \in L_x$$



Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $\langle y_t - P_K(x), z - P_K(x) \rangle \leq 0 \quad \forall z \in K$

$$\forall y_t = P_K(x) + t(x - P_K(x)) \in L_x.$$

Πράγματι, $\forall z \in K$

$$\begin{aligned} \langle y_t - P_K(x), z - P_K(x) \rangle &= \langle P_K(x) - P_K(x), z - P_K(x) \rangle + t \langle x - P_K(x), z - P_K(x) \rangle \\ &= t \langle x - P_K(x), z - P_K(x) \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

επειδή $y_t \in L_x \Rightarrow t \geq 0$, και από το προηγούμενο θεώρημα.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

Έστω X χώρος Hilbert, $\emptyset \neq K \subseteq X$ κυρτό και κλειστό.

$$(1) \quad P_K \circ P_K = P_K$$

$$(2) \quad \langle x-y, P_K(x)-P_K(y) \rangle \geq \|P_K(x)-P_K(y)\|^2 \quad \text{και άρα (απο C-S)} \\ \|P_K(x)-P_K(y)\| \leq \|x-y\| \quad \left(\text{δηλαδή η } P_K \text{ είναι Lipschitz} \right) \\ \forall x, y \in X \quad \left(\text{με σταθερά 1} \right)$$

απόδειξη

Ξεκινάμε με το αριστερό μέλος και έχουμε:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \langle x-y, P_K(x)-P_K(y) \rangle &= \\ &= \langle x-P_K(x), P_K(x)-P_K(y) \rangle + \langle P_K(x)-P_K(y), P_K(x)-P_K(y) \rangle + \langle P_K(y)-y, P_K(x)-P_K(y) \rangle \\ &= -\langle x-P_K(x), P_K(y)-P_K(x) \rangle + \|P_K(x)-P_K(y)\|^2 - \langle y-P_K(y), P_K(x)-P_K(y) \rangle \\ &\geq 0 + \|P_K(x)-P_K(y)\|^2 + 0 \end{aligned}$$

απο θεώρημα-Χαρακτηρισμό της μετρικής προβολής, συγκεκριμένα την συνεπαγωγή (1) $\Rightarrow$ (2).

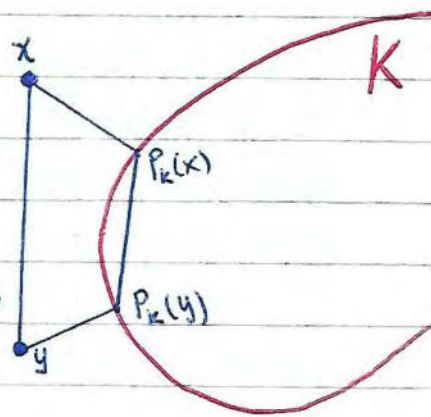
$$(3) \quad \langle x-y, P_K(x)-P_K(y) \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in X$$

$$(4) \quad \|P_K(x)-P_K(y)\|^2 + \|(x-P_K(x))-(y-P_K(y))\|^2 \leq \|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

απόδειξη

Ξεκινάμε πάλι απο το αριστερό μέλος:

$$\begin{aligned} &\|P_K(x)-P_K(y)\|^2 + \|(x-P_K(x))-(y-P_K(y))\|^2 \\ &= \|P_K(x)-P_K(y)\|^2 + \|(x-y)-(P_K(x)-P_K(y))\|^2 \\ &= \|P_K(x)-P_K(y)\|^2 + \|x-y\|^2 + \|P_K(x)-P_K(y)\|^2 - 2\langle x-y, P_K(x)-P_K(y) \rangle \\ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} &= 2\|P_K(x)-P_K(y)\|^2 - 2\langle x-y, P_K(x)-P_K(y) \rangle + \|x-y\|^2 \\ &\leq \|x-y\|^2 \end{aligned}$$



ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΑΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X χώρος Hilbert. Ένα υπερεπίπεδο στον X είναι ένα σύνολο της μορφής $H(u, c) = \{ x \in X : \langle u, x \rangle = c \}$

όπου $u \in X \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$.

Επίσης, $H(u, 0) = u^\perp$

Πρόταση

Έστω X χώρος Hilbert, και $u \in X \setminus \{0\}$. Τότε ο $u^\perp$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος και $X = u^\perp \oplus \langle u \rangle$, δηλαδή για κάθε $x \in X$, υπάρχουν μοναδικά $x' \in u^\perp$ και $x'' \in \langle u \rangle$ τέτοια ώστε $x = x' + x''$.

απόδειξη

► Έστω $x, y \in u^\perp$ και $a, b \in \mathbb{R}$

Απο την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου έχουμε $\langle u, ax + by \rangle = a\langle u, x \rangle + b\langle u, y \rangle = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$

Άρα, $ax + by \in u^\perp$. Αυτό δείχνει ότι ο $u^\perp$ είναι γραμμικός υπόχωρος.

► Έστω τώρα $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον $u^\perp$ και έστω ότι $x_n \rightarrow x$ για κάποιο $x \in X$. Θα δείξουμε ότι $x \in u^\perp$ και θα έπεται ότι ο $u^\perp$ είναι κλειστός.

Πράγματι, απο την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου πάλι και την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$|\langle u, x_n \rangle - \langle u, x \rangle| = |\langle u, x_n - x \rangle| \leq \|u\| \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

και άρα $\langle u, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

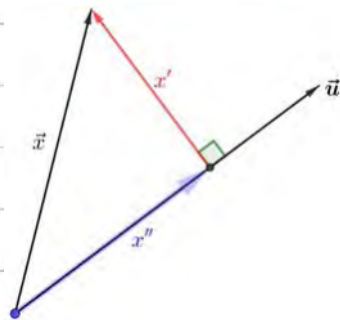
και άρα $x \in u^\perp$.

► Τέλος δείχνουμε ότι $X = u^\perp \oplus \langle u \rangle$. Έστω $x \in X$
Θέτουμε

$$x' := x - \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u$$

και

$$x'' := \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u$$



Τότε $x'' \in \langle u \rangle$ και

$$\begin{aligned} \langle u, x' \rangle &= \left\langle u, x - \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u \right\rangle = \langle u, x \rangle - \left\langle u, \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u \right\rangle \\ &= \langle u, x \rangle - \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} \langle u, u \rangle = \langle u, x \rangle - \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} \|u\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άρα, $x' \in u^\perp$

Προφανώς επίσης, $x = x' + x''$. Σημειωτέον ότι
 $x'' = \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} u$ είναι η προβολή του διανύσματος x
πάνω στο διάνυσμα u .

► Για την μοναδικότητα αυτής της αναπαράστασης έστω ότι
 $x = x' + cu = y' + bu$ για δύο $x', y' \in u^\perp$ και δύο
 $b, c \in \mathbb{R}$.

Τότε $x' - y' = (b - c)u$ και επειδή $x', y' \in u^\perp$ και
ο $u^\perp$ είναι γραμμικός έπεται ότι $x' - y' \in u^\perp$.

Πρέπει τότε

$$\begin{aligned} \langle u, x' - y' \rangle &= 0 \iff \langle u, (b - c)u \rangle = 0 \\ &\iff (b - c) \langle u, u \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (b-c) \|u\|^2 \Leftrightarrow b=c, \quad \text{διότι } u \in X \setminus \{0\} \text{ και άρα } \|u\| \neq 0.$$

Έπεται τώρα ότι και $x' - y' = (b-c)u = 0$ και η αναπαράσταση $x = x' + cu$ με $x' \in u^\perp$ και $c \in \mathbb{R}$ είναι μοναδική.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω X χώρος Hilbert και $\emptyset \neq A, B \subseteq X$.
Λέμε ότι τα A και B **διαχωρίζονται αυστηρά** από ένα υπερεπίπεδο $H(u, c)$
αν $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $A \subseteq H^+(u, c+\varepsilon)$ και $B \subseteq H^-(u, c-\varepsilon)$

Λέμε ότι τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά αν υπάρχει $H(u, c)$ που τα διαχωρίζει αυστηρά.

υπενθύμιση:

$$H^+(u, c+\varepsilon) = \{x \in X : \langle u, x \rangle \geq c+\varepsilon\}$$

$$H^-(u, c-\varepsilon) = \{x \in X : \langle u, x \rangle \leq c-\varepsilon\}$$

Παρατηρήσεις:

1 $H(u, c) = u^\perp + x = H(u, 0) + x, \quad \text{όπου } x \in H(u, c)$

2 Σημειώτεον ότι αν $A \subseteq H^-(u, c-\varepsilon)$ και $B \subseteq H^+(u, c+\varepsilon)$ για κάποια $u \in X \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, τότε επίσης $A \subseteq H^+(-u, -c+\varepsilon)$ και $B \subseteq H^-(-u, -c-\varepsilon)$.

Επομένως, για να δείξει κανείς ότι τα δύο σύνολα A και B διαχωρίζονται αυστηρά δεν έχει σημασία αν θα αποδείξει ότι

$$A \subseteq H^-(u, c-\varepsilon) \text{ και } B \subseteq H^+(u, c+\varepsilon) \text{ για κάποια } u \in X \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R} \text{ και } \varepsilon > 0 \text{ ή}$$

$$B \subseteq H^-(u, c-\varepsilon) \text{ και } A \subseteq H^+(u, c+\varepsilon) \text{ για κάποια } u \in X \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R} \text{ και } \varepsilon > 0.$$

Πρόταση

Έστω X χώρος Hilbert, $\emptyset \neq K \subseteq X$ κυρτό και κλειστό και $x \in X \setminus K$.

Τότε τα $\{x\}$ και K διαχωρίζονται αυστηρά.

απόδειξη

Έχουμε $\text{dist}(x, K) = \|x - P_K(x)\| > 0$ και $P_K(x) \neq x$.

Ορίζουμε

$$u = \frac{x - P_K(x)}{\|x - P_K(x)\|}$$

$$\text{Τότε } \langle u, x \rangle = \frac{\langle x - P_K(x), x \rangle}{\|x - P_K(x)\|}$$

Αν $y \in K$

$$\begin{aligned} \langle u, y - x \rangle &= \frac{\langle x - P_K(x), y - x \rangle}{\|x - P_K(x)\|} = \frac{\langle x - P_K(x), y - P_K(x) \rangle}{\|x - P_K(x)\|} + \frac{\langle x - P_K(x), P_K(x) - x \rangle}{\|x - P_K(x)\|} \\ &\leq 0 + (-\|x - P_K(x)\|) \end{aligned}$$

$$\text{Θέτουμε } C = -\frac{1}{2} \|x - P_K(x)\| + \langle u, x \rangle$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \|x - P_K(x)\| > 0$$

$$\text{Τότε } \langle u, y \rangle \leq C - \varepsilon \quad \forall y \in K$$

$$\text{και } \langle u, x \rangle = C + \varepsilon \geq C + \varepsilon$$

Αρα το $H(u, \varepsilon)$ διαχωρίζει αυστηρά τα $\{x\}$ και K .

Παρατήρηση:

Έστω X χώρος Hilbert και $\emptyset \neq A, B \subseteq X$.

Τότε,

$A \cap B \neq \emptyset$ ανν τα $\{0\}$ και $A - B$ διαχωρίζονται αυστηρά.

Λήμμα Έστω X χώρος Hilbert και $\emptyset \neq A, B \subseteq X$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα

(1) Τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά από υπερεπίπεδο.

(2) Τα $\{0\}$ και $A-B$ διαχωρίζονται αυστηρά από υπερεπίπεδο.

Απόδειξη

(1) $\Rightarrow$ (2) Έστω ότι τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά από υπερεπίπεδο.

Τότε υπάρχουν $u \in X \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ τ.ω.

$$\langle u, x \rangle \leq c - \varepsilon \quad \forall x \in A$$

$$\langle u, x \rangle \geq c + \varepsilon \quad \forall x \in B$$

Τότε προκύπτει ότι:

$$\langle u, x-y \rangle = \langle u, x \rangle - \langle u, y \rangle \leq c - \varepsilon - (c + \varepsilon) = -2\varepsilon \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

$$\langle u, x-y \rangle \leq -2\varepsilon \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

Θέτουμε $c' = -\varepsilon \in \mathbb{R}$, τότε

$$\langle u, z \rangle \leq c' - \varepsilon \quad \forall z \in A-B = \{x-y : x \in A \text{ και } y \in B\}$$

$$\langle u, 0 \rangle = 0 = c' + \varepsilon \geq c' + \varepsilon$$

Άρα δείξαμε ότι τα $A-B$ και $\{0\}$ διαχωρίζονται αυστηρά από υπερεπίπεδο

(2) $\Rightarrow$ (1)

Έστω ότι τα $\{0\}$, $A-B$ διαχωρίζονται αυστηρά.

Άρα λοιπόν υπάρχουν $u \in X \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ τ.ω.

$$\langle u, z \rangle \leq c - \varepsilon \quad \forall z \in A-B$$

$$0 = \langle u, 0 \rangle \geq c + \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad c \leq -\varepsilon$$

Τότε $\langle u, x-y \rangle \leq c - \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ και } y \in B$

$$\Leftrightarrow \langle u, x \rangle \leq c - \varepsilon + \langle u, y \rangle \quad \forall x \in A \text{ και } y \in B$$

Τότε το $\{\langle u, x \rangle : x \in A\}$ είναι μη-κενό, γιατί $A \neq \emptyset$, και άνω φραγμένο από το $c - \varepsilon + \langle u, y \rangle \quad \forall y \in B$. (επίσης $B \neq \emptyset$)
 Άρα το $\{\langle u, x \rangle : x \in A\}$ έχει supremum στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Τότε} \quad \sup_{x \in A} \langle u, x \rangle \leq c - \varepsilon + \langle u, y \rangle \quad \forall y \in B.$$

Τότε, το σύνολο $\{\langle u, y \rangle : y \in B\}$ είναι κάτω φραγμένο από το $\sup_{x \in A} \langle u, x \rangle - c + \varepsilon$ και άρα έχει infimum στο $\mathbb{R}$, άρα

$$\inf_{y \in B} \langle u, y \rangle \geq \sup_{x \in A} \langle u, x \rangle - c + \varepsilon$$

Οπότε, έχουμε ότι :

$$\inf_{y \in B} \langle u, y \rangle - \sup_{x \in A} \langle u, x \rangle \geq -c + \varepsilon$$

$$\text{Έστω} \quad c' = \frac{1}{2} \inf_{y \in B} \langle u, y \rangle + \frac{1}{2} \sup_{x \in A} \langle u, x \rangle$$

Τότε για $x \in A$

$$\begin{aligned} \langle u, x \rangle &\leq \sup_{x' \in A} \langle u, x' \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sup_{x' \in A} \langle u, x' \rangle + \frac{1}{2} \inf_{y \in B} \langle u, y \rangle + \frac{1}{2} \sup_{x' \in A} \langle u, x' \rangle - \frac{1}{2} \inf_{y \in B} \langle u, y \rangle \\ &\leq c' + \frac{1}{2} (c - \varepsilon) \leq c' + \frac{1}{2} (-\varepsilon - \varepsilon) \quad , \quad \text{άρα} \\ \langle u, x \rangle &\leq c' - \varepsilon \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

και για $y \in B$

$$\begin{aligned} \langle u, y \rangle &\geq \inf_{y' \in B} \langle u, y' \rangle \\ &= \frac{1}{2} \inf_{y' \in B} \langle u, y' \rangle + \frac{1}{2} \sup_{x \in A} \langle u, x \rangle + \frac{1}{2} \inf_{y' \in B} \langle u, y' \rangle - \frac{1}{2} \sup_{x \in A} \langle u, x \rangle \\ &\geq c' + \frac{1}{2} (\varepsilon - c) \geq c' + \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon) \quad , \quad \text{άρα} \\ \langle u, y \rangle &\geq c' + \varepsilon \quad \forall y \in B \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά από το υπερεπίπεδο $H(u, c')$ και ίδιο $\varepsilon > 0$.

Θεώρημα

Έστω X χώρος Hilbert, και δύο ξένα σύνολο A, B με $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ για τα οποία υποθέτουμε ότι:

- A κυρτό και κλειστό
- B κυρτό και συμπαγές

Τότε, τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά.

απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι το $A-B$ και το $\{0\}$ διαχωρίζονται αυστηρά όταν $A \cap B = \emptyset$, και A κλειστό, κυρτό και B κυρτό, συμπαγές.

Απο Πρόταση (την δεύτερη του σημερινού μαθήματος) αρκεί να δείξουμε ότι $A-B$ κλειστό και κυρτό και $0 \notin A-B$.

- Το ότι $0 \notin A-B$ έπεται από την Παρατήρηση, αφού $A \cap B \neq \emptyset$.

- Έστω $x, y \in A-B$ και $\lambda \in [0, 1]$

Τότε υπάρχουν $a_x, a_y \in A$ και $b_x, b_y \in B$ τέτοια ώστε:
 $x = a_x - b_x$ και $y = a_y - b_y$

$$\begin{aligned} \text{Τότε} \quad \lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(a_x - b_x) + (1-\lambda)(a_y - b_y) \\ &= \lambda a_x + (1-\lambda)a_y - [\lambda b_x + (1-\lambda)b_y] \in A-B \end{aligned}$$

Διότι $\lambda a_x + (1-\lambda)a_y \in A$ και $\lambda b_x + (1-\lambda)b_y \in B$ και επειδή A, B κυρτά. Άρα $A-B$ κυρτό.

Μένει να δείξουμε ότι $A-B$ κλειστό.

► Έστω $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $A-B$, τ.ω. $z_n \rightarrow z$
για κάποιο $z \in X$.

Θα δείξουμε ότι $z \in A-B$.

Υπάρχουν $a_n \in A$, $b_n \in B$ τ.ω. $z_n = a_n - b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Επειδή η $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο συμπαγές B , έχει
υπακολουθία $(b_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$, $k_1 < k_2 < \dots < \dots$ η οποία
συγκλίνει σε κάποιο $b \in B$

Τότε $a_{k_n} = z_{k_n} + b_{k_n} \rightarrow z + b$

Έστω $a := z + b$.

Επειδή A κλειστό πρέπει $a \in A$. Επομένως το $z = a - b$
με $a \in A$ και $b \in B$. Δηλαδή $z \in A-B$

Αρα λοιπόν καταφέραμε να δείξουμε ότι τα $\{0\}, A-B$
διαχωρίζονται αυστηρά, οπότε από το Λήμμα (το πρώτο)
έπεται ότι A, B διαχωρίζονται αυστηρά.

Παρατήρηση:

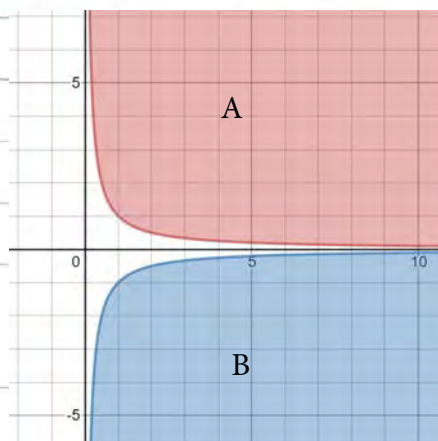
Χωρίς την συμπαγεία του ενός από τα δύο σύνολα, ο αυστηρός
διαχωρισμός για ξένα κυρτά & κλειστά σύνολα δεν ισχύει
ούτε καν στον $\mathbb{R}^d$

π.χ.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ κ' } y \geq \frac{1}{x}\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ κ' } y \leq -\frac{1}{x}\}$$

A, B κυρτά & κλειστά, αλλά
δεν διαχωρίζονται αυστηρά.



Στο παράδειγμα αυτό τα A, B διαχωρίζονται από υπερεπίπεδο, αλλά όχι αυστηρά.

Το $H(e_2, 0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle e_2, x \rangle = 0\} = e_2^\perp$ διαχωρίζει τα A, B

με την εξής έννοια:

$\forall (x, y) \in A \quad \langle e_2, (x, y) \rangle = y > 0$, αφού $y \geq \frac{1}{x}$ και $x > 0$

$\forall (x, y) \in B \quad \langle e_2, (x, y) \rangle = y < 0$, αφού $y \leq -\frac{1}{x}$ και $x > 0$

Στις άπειρες διαστάσεις είτε αυτός ο διαχωρισμός γίνεται εφικτός χωρίς την συμπαγεία.

ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^d$

Πρόταση

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και συμπαγές. Τότε για οποιοδήποτε $r > 0$ ζ.ω. $K \subseteq U_2(0, r)$, ισχύει:

$$P_K(S_2(0, r)) = \partial K$$

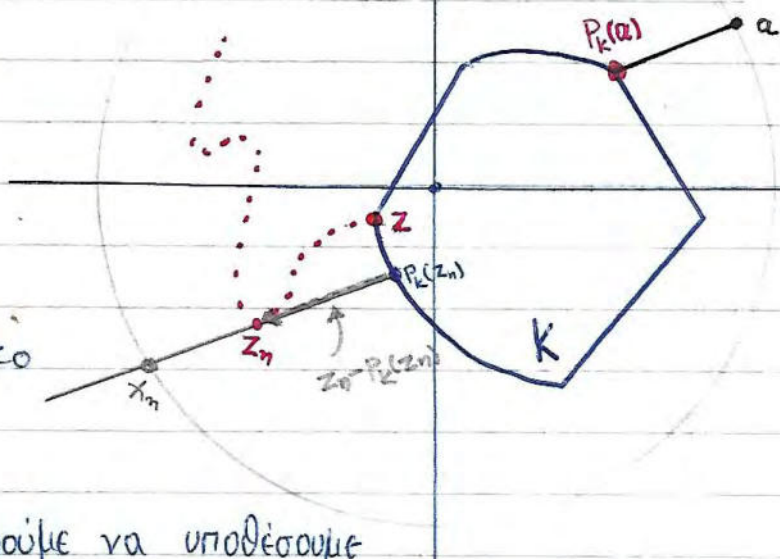
όπου $U_2(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 < r\}$

$S_2(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = r\}$

απόδειξη

Έστω $z \in \partial K$

Υπάρχει ακολουθία $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}^d \setminus K$ ζω $z_n \rightarrow z$



Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z_n \in U_2(0, r) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ επειδή $z_n \rightarrow z$ και $z \in K \subseteq U_2(0, r)$

Τότε από την συνέχεια της P_K , $P_K(z_n) \rightarrow P_K(z) = z$

Η συνάρτηση $\varphi_n(t) = \|P_K(z_n) + t[z_n - P_K(z_n)]\|$

Η συνάρτηση φ_n είναι συνεχής. Πράγματι

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| &\leq \left| \|P_k(z_n) + t[z_n - P_k(z_n)]\| - \|P_k(z_n) + s[z_n - P_k(z_n)]\| \right| \\ &\leq \|P_k(z_n) + t[z_n - P_k(z_n)] - (P_k(z_n) + s[z_n - P_k(z_n)])\| \\ &= |t-s| \|z_n - P_k(z_n)\| \rightarrow 0 \text{ καθώς } s \rightarrow t \quad \forall \text{ σταθερό } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Επίσης $\varphi_n(0) = \|P_k(z_n)\| < r$

και $\varphi_n(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = +\infty$, διότι για $t > 0$

$$\varphi_n(t) \geq t \|z_n - P_k(z_n)\| - \|P_k(z_n)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty \quad (\text{γιατί } z_n \neq P_k(z_n), \text{ αφού } z_n \notin K)$$

Αρα υπάρχει $t_n > 0$ τ.ω.

$$\|P_k(z_n) + t_n(z_n - P_k(z_n))\| = r \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Αρα $x_n = P_k(z_n) + t_n[z_n - P_k(z_n)] \in S_2(0, r) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Το $S_2(0, r)$ είναι συμπαγές, άρα υπάρχει υποακολουθία $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$, $k_1 < k_2 < \dots$ τ.ω. $x_{k_n} \rightarrow x$ για κάποιο $x \in S_2(0, r)$.

Απο συνέχεια $P_k(x_{k_n}) \rightarrow P_k(x)$

Όμως $x_n \in L_{z_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, άρα $p(x_n) = p(z_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Αρα $P_k(x_{k_n}) = P_k(z_{k_n}) \rightarrow P_k(z) = z$

Αρα $z = P_k(x)$

Πρόταση (υπενθύμηση)

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και συμπαγές. Τότε για οποιαδήποτε ακτίνα $r > 0$ τ.ω. $K \subseteq U_2(0, r)$, ισχύει

$$P_K(S(0, r)) = \partial K$$

Πρόταση

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και συμπαγές. Τότε για οποιαδήποτε ακτίνα $r > 0$ τ.ω. $K \subseteq U_2(0, r)$, ισχύει

$$P_K(S_2(0, r) \cap \text{aff}(K)) = rb(K)$$

απόδειξη

Ιδια με την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, εκτός από την επιλογή του z_n . Συγκεκριμένα:

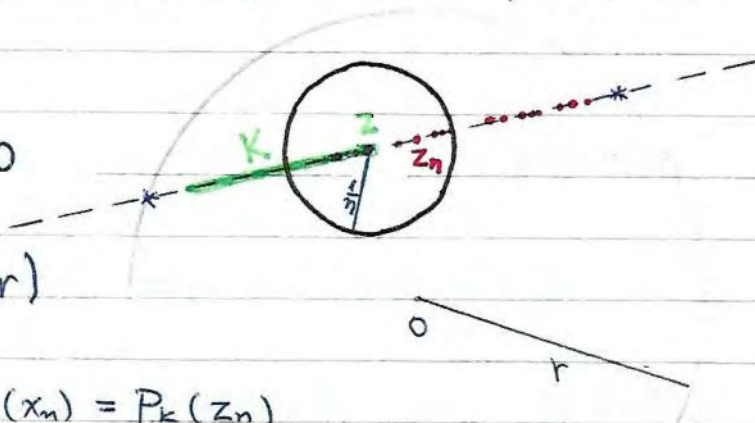
Έστω $z \in rb(K) = \bar{K} \setminus ri(K)$

Υπάρχει ακολουθία $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $z_n \in \text{aff}(K) \setminus K$ τ.ω. $z_n \rightarrow z$.

Πράγματι, επιλέχουμε $z_n \in U_2(z, \frac{1}{n}) \cap (\text{aff}(K))$. Αυτό γίνεται, διότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_2(z, \frac{1}{n}) \cap \text{aff}(K) \not\subseteq K$, επειδή το $z \notin ri(K)$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $t_n > 0$ τέτοιο ώστε

$$x_n = P_K(z_n) + t_n(z_n - P_K(z_n)) \in S_2(0, r)$$



Τότε $x_n \in L_{z_n}$ και άρα $P_K(x_n) = P_K(z_n)$

και επειδή $P_K(z_n) \in K \subseteq \text{aff}(K)$ και $z_n \in \text{aff}(K)$ και x_n αφφινικός συνδυασμός τους πρέπει $x_n \in \text{aff}(K)$.

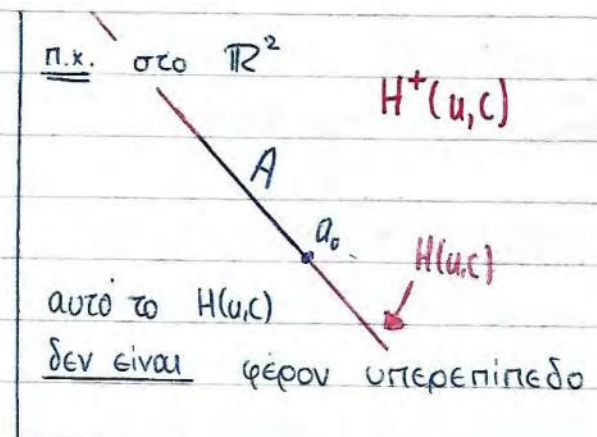
Επειδή $\text{aff}(K)$ είναι κλειστό, τότε το $S_2(0,r) \cap \text{aff}(K)$ είναι συμπαγές και άρα υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ όπου $k_1 < k_2 < \dots$ τ.ω. $x_{k_n} \rightarrow x$ για κάποιο $x \in S_2(0,r) \cap \text{aff}(K)$.

Τότε $z = P_K(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_K(z_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_K(x_{k_n}) = P_K(x)$ από την συνέχεια της P_K .

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $a_0 \in \partial A$.

Θα λέμε ότι ένα υπερεπίπεδο $H(u,c)$ με $u \neq 0$ και $c \in \mathbb{R}$ είναι φέρον υπερεπίπεδο για το A στο σημείο a_0 ή ότι είναι υπερεπίπεδο στήριξης για το A στο σημείο a_0 αν:

- $a_0 \in H(u,c)$
- $A \subseteq H^+(u,c)$
- $A \not\subseteq H(u,c)$



Παρατήρηση

Αν $A \subseteq H^-(u,c)$ και $a_0 \in H(u,c)$ και

$A \not\subseteq H(u,c)$, τότε:

$A \subseteq H^+(-u,-c)$, $a_0 \in H(-u,-c)$ και $A \not\subseteq H(-u,-c)$

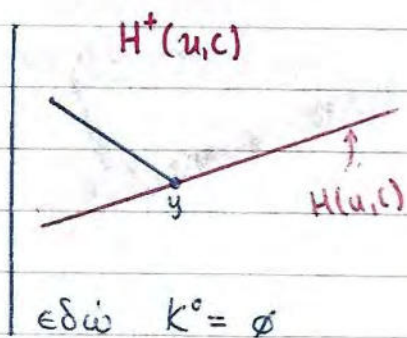
ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ και $y \in \text{rb}(K)$

Τότε το K έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο y

απόδειξη (πιο ειδικής περίπτωσης)

Υποθέτουμε ότι $K^\circ \neq \emptyset$ και άρα $\dim K = d$.



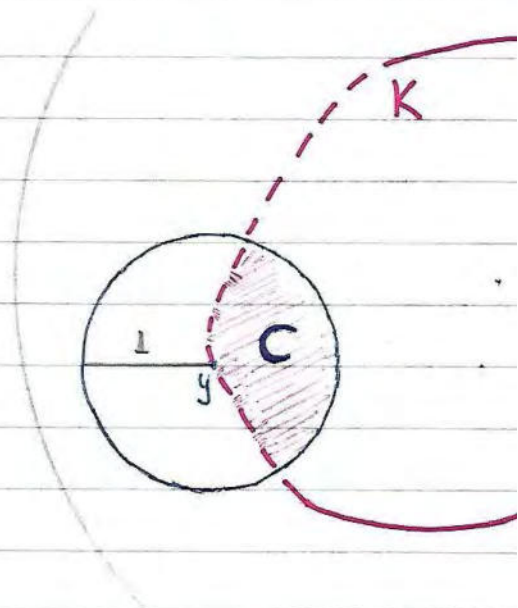
Τότε, $rb(K) = \partial K$, άρα $y \in \partial K$. (αφού από υπόθεση $y \in rb(K)$)

Έστω $C = B_2(y, 1) \cap \bar{K}$

Τότε, το C είναι συμπαχές και $y \in \partial C$.

Πράγματι, έχουμε ότι $y \in C$, διότι
 $y \in \partial K$ και άρα $y \in \bar{K}$ και $y \in C^\circ$,
διότι $C^\circ \subseteq K^\circ$ και $y \notin K^\circ$

Άρα $y \in \partial C$.



Επιλέχουμε $r > 0$ τ.ω. $C \in U_2(o, r)$

Απο την Πρόταση υπάρχει $x \in S_2(o, r)$

τ.ω. $P_C(x) = y$.

Ισχυρισμός: $P_{\bar{K}}(x) = y$

Έστω ότι υπάρχει $z \in \bar{K}$ τ.ω. $\|z - x\|_2 < \|y - x\|_2$

Τότε για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ έχουμε ότι $z_\lambda = \lambda z + (1 - \lambda)y \in \bar{K}$
(επειδή K κυρτό $\implies \bar{K}$ κυρτό)

Επίσης, για $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\|z_\lambda - x\|_2 &= \|\lambda z + (1 - \lambda)y - x\|_2 = \|\lambda z + (1 - \lambda)y - \lambda x - (1 - \lambda)x\|_2 \leq \\ &\leq \lambda \|z - x\|_2 + (1 - \lambda) \|y - x\|_2 \\ &< \lambda \|y - x\|_2 + (1 - \lambda) \|y - x\|_2 = \|y - x\|_2\end{aligned}$$

Και καθώς $\lambda \rightarrow 0$, τότε $z_\lambda \rightarrow y$ και άρα $z_\lambda \in B(y, 1)$

για $\lambda > 0$ και αρκούντως κοντά στο 0.

Επομένως $z_\lambda \in C$ και $z_\lambda \neq y$ και $\|z_\lambda - x\|_2 < \|y - x\|_2$
για $\lambda > 0$. ΑΤΟΠΟ! Άρα $P_{\bar{K}}(x) = y$

Απο τον χαρακτηρισμό της μετρικής προβολής και απο τον ισχυρισμό που δείξαμε απο πάνω, ($P_{\bar{K}}(x) = y$) έχουμε:

$$\langle x-y, z-y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in \bar{K}, \text{ δηλαδή}$$

$$\underbrace{\langle x-y, z \rangle}_u \leq \underbrace{\langle x-y, y \rangle}_c \quad \forall z \in \bar{K}, \text{ δηλαδή}$$

$$\langle u, z \rangle \leq c \quad \forall z \in \bar{K} \text{ άρα και } \forall z \in K$$

Επίσης, $\langle u, y \rangle = c$ εξ' ορισμού.

Δηλαδή, $y \in H(u, c)$, $K \subseteq H(u, c)$
 Επιπλέον $K \not\subseteq H(u, c)$, διότι $d = \dim K > \dim H(u, c) = d-1$

Για την γενική περίπτωση Έστω $y \in \text{rb}(K)$
 Θεωρούμε πάλι $C = B_2(y, 1) \cap \bar{K}$ και τότε το $y \in \text{rb}(C)$

Απο την (δευτέρα) Πρόταση βρίσκουμε $\text{aff}(C) = \text{aff}(K)$
 με $\|x\|_2 = r$, όπου $r > 0$ είναι τω. $C \subseteq U_2(0, r)$, τέτοιο ώστε
 $P_C(x) = y$. Τότε $P_K(x) = y$.

(ίδια απόδειξη)

Και τότε για $u = x - y$ και $c = \langle u, y \rangle$ έχουμε ότι $\langle u, z \rangle \leq c$
 για κάθε $z \in K$ και $\langle u, y \rangle = c$

Μένει να δείξουμε ότι $K \not\subseteq H(u, c)$

Έχουμε ότι $u \notin H(u, c) - y = u^\perp$. Επίσης $u \in \text{aff}(K) - y$

Επεται ότι

$$\dim([\text{aff}(K) - y] \cap [H(u, c) - y]) < \dim(\text{aff}(K) - y)$$

$$\Rightarrow \dim(K \cap H(u, c)) < \dim K$$

Άρα $K \not\subseteq K \cap H(u, c)$ άρα $K \not\subseteq H(u, c)$

► Απόδειξη του ισχυρισμού: $\text{aff}(K) = \text{aff}(C)$

Προφανώς $C \subseteq \bar{K} \Rightarrow \text{aff}(C) \subseteq \text{aff}(\bar{K})$

Έστω τώρα $x \in \bar{K}$

Τότε $z_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y$ ανήκει στο $\bar{K}$ για κάθε $\lambda \in [0, 1]$, από
 κυρτότητα του $\bar{K}$, και ανήκει και στην $B_2(y, 1)$ για $\lambda > 0$

και αρκούντως μικρό, γιατί $\|z_\lambda - y\|_2 = \lambda \|x - y\|_2$ και αυτό είναι μικρότερο ή ίσο του 1, για $\lambda \leq \|x - y\|_2^{-1}$ και τότε

$$x = \frac{1}{\lambda} z_\lambda + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) y$$

ανήκει στο $\text{aff}(C)$ ως αφρινικός συνδυασμός των στοιχείων z_λ και y στο C . Αυτό δείχνει ότι $\bar{K} \subseteq \text{aff}(C)$, και αφού ο $\text{aff}(C)$ είναι αφρινικός, έπεται ότι $\text{aff}(\bar{K}) \subseteq \text{aff}(C)$. Αυτό δείχνει ότι $\text{aff}(\bar{K}) = \text{aff}(C)$.

Η ισότητα $\text{aff}(\bar{K}) = \text{aff}(K)$ είναι άσκηση του 3^{ου} φυλλαδίου.

[Προφανώς $\text{aff}(K) \subseteq \text{aff}(\bar{K})$ και επειδή κάθε αφρινικός χώρος και άρα και ο $\text{aff}(K)$, είναι κλειστός, από την $K \subseteq \text{aff}(K)$ έπεται ότι $\bar{K} \subseteq \text{aff}(K)$ και άρα τελικά $\text{aff}(\bar{K}) \subseteq \text{aff}(K)$.]

► Απόδειξη του ισχυρισμού $y \in \text{rb}(C)$ στην παραπάνω απόδειξη:

Έχουμε ότι $y \in \text{rb}(K) \subseteq \bar{K}$ και προφανώς $y \in B_2(y, 1)$ άρα $y \in C$.

Επίσης $y \in \text{rb}(K) = \bar{K} \setminus \text{ri}(K)$, άρα $y \notin \text{ri}(K)$ και άρα $U_2(y, \varepsilon) \cap \text{aff}(K)$ δεν περιέχεται στο K για κανένα $\varepsilon > 0$.

Όμως $\text{aff}(K) = \text{aff}(C)$ και άρα $U_2(y, \varepsilon) \cap \text{aff}(C)$ δεν περιέχεται στο K , άρα ούτε στο υποσύνολό του C , για κανένα $\varepsilon > 0$. Αυτό σημαίνει ότι $y \notin \text{ri}(C)$ και άρα τελικά $y \in C \setminus \text{ri}(C) = \text{rb}(C)$.

Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήθηκε επίσης το εξής:

Λήμμα

Έστω H_1, H_2 γραμμικοί υπόχωροι ενός γραμμικού χώρου X πεπερασμένης διάστασης. Αν $H_2 \setminus H_1 \neq \emptyset$, τότε $\dim(H_2 \cap H_1) < \dim(H_2)$.

απόδειξη

Ως γνωστόν, ο $H_2 \cap H_1$ είναι γραμμικός υπόχωρος.

Έστω $u_1, \dots, u_k$ μία βάση του $H_2 \cap H_1$ και έστω και $u \in H_2 \setminus H_1$. Τότε $u \notin H_2 \cap H_1$ και άρα το u δεν γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $u_1, \dots, u_k$.

Έπεται ότι τα $u, u_1, \dots, u_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πράγματι, έστω $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda u + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$.
Αν $\lambda \neq 0$, τότε

$$u = -\frac{\lambda_1}{\lambda} u_1 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda} u_k$$

γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $u_1, \dots, u_k$, άτοπο.

Επομένως $\lambda = 0$ και άρα

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$$

και από την γραμμική ανεξαρτησία των $u_1, \dots, u_k$ έπεται τώρα ότι $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ επίσης.

Έπεται ότι $\dim(H_2) \geq k+1 > k = \dim(H_2 \cap H_1)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

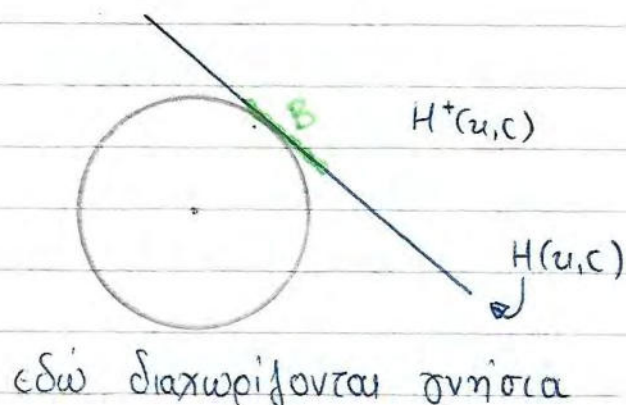
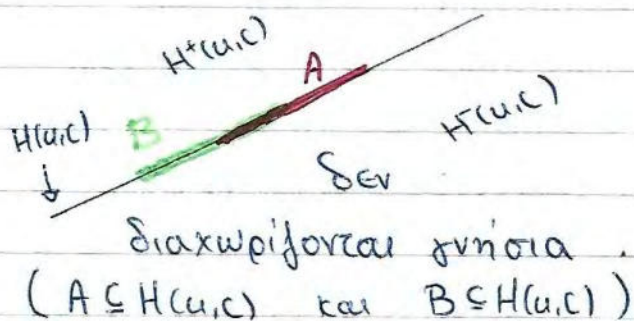
Αν $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ και $y \in \text{rb}(K)$, τότε το K έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο y , δηλαδή υπάρχει $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- $\langle u, x \rangle \leq c \quad \forall x \in K$
- $\langle u, y \rangle = c$
- $K \not\subseteq H(u, c)$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενά.

Τα A και B διαχωρίζονται γνήσια αν υπάρχουν $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- $A \subseteq H^+(u, c)$ και $B \subseteq H^-(u, c)$
- $A \not\subseteq H(u, c)$ ή $B \not\subseteq H(u, c)$



Παρατήρηση

Αν $A \subseteq H^-(u, c)$, $B \subseteq H^+(u, c)$ και $\{A \not\subseteq H(u, c) \text{ ή } B \not\subseteq H(u, c)\}$

τότε έχουμε

$A \subseteq H^+(-u, -c)$, $B \subseteq H^-(-u, -c)$ και $\{A \not\subseteq H(-u, -c) \text{ ή } B \not\subseteq H(-u, -c)\}$

Σχόλιο: Η γνήσια διαχωριστικότητα είναι ασθενέστερη από την ανυστηρή διαχωριστικότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

(i) Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και $x \notin K$. Τότε τα $\{x\}$ κ' K διαχωρίζονται γνήσια.

(ii) Έστω $\emptyset \neq K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτά σύνολα τέτοια ώστε να ισχύει : $ri(K_1) \cap ri(K_2) = \emptyset$.

Τότε τα K_1 και K_2 διαχωρίζονται γνήσια.

απόδειξη (i)

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και $x \notin K$.

► Αν $x \notin \bar{K}$, τότε τα $\{x\}$ και $\bar{K}$ διαχωρίζονται αυστηρά από γενικό θεώρημα διαχωρισμού για χώρους Hilbert ($\{x\}$ συμπαγές κυρτό και $\bar{K}$ είναι κυρτό και κλειστό).

Αρα υπάρχουν $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$\langle u, y \rangle \leq c - \varepsilon \quad \forall y \in \bar{K}$$

$$\langle u, x \rangle \geq c + \varepsilon$$

Τότε $K \subseteq \bar{K} \subseteq H^-(u, c)$, $\{x\} \subseteq H^+(u, c)$ και $\{x\} \not\subseteq H(u, c)$. (Επίσης, $K \not\subseteq H(u, c)$ αλλά μας αρκεί και ένα από τα δύο να μην περιέχεται στο $H(u, c)$).

Αρα το $H(u, c)$ διαχωρίζει τα $\{x\}$ και K γνήσια.

► Αν $x \in \bar{K}$. Από υπόθεση έχουμε ότι $x \notin K \Rightarrow x \notin ri(K)$ (διότι $ri(K) \subseteq K$). Αρα $x \in \bar{K} \setminus ri(K) = rb(K)$.

Αρα το K έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο x . Δηλαδή, υπάρχουν $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $K \subseteq H^-(u, c)$, $x \in H(u, c)$ και $K \not\subseteq H(u, c)$. Τότε :

$$\langle u, y \rangle \leq c \quad \forall y \in K, \quad \langle u, x \rangle = c \quad \text{και} \quad K \not\subseteq H(u, c).$$

Αρα το $H(u, c)$ διαχωρίζει τα $\{x\}$ και K γνήσια.

απόδειξη (ii)

Έστω $\emptyset \neq K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτά με $ri(K_1) \cap ri(K_2) = \emptyset$.

Τότε $0 \notin ri(k_1) - ri(k_2) = \{a-b : a \in ri(k_1), b \in ri(k_2)\}$

Επίσης, $ri(k_i)$ είναι κυρτό για $i \in \{1, 2\}$. Πραγματι, αν $x, y \in ri(k_i)$, τότε $y \in \overline{K_i}$ άρα $[x, y) \subseteq ri(k_i)$ και άρα $[x, y] \subseteq ri(k_i)$, διότι το y το υποθέσαμε να είναι στοιχείο του $ri(k_i)$.

Επεται ότι $ri(k_1) - ri(k_2)$ είναι κυρτό: Αν $x, y \in ri(k_1) - ri(k_2)$, τότε υπάρχουν $x_1, y_1 \in ri(k_1)$ και $x_2, y_2 \in ri(k_2)$ τ.ω.
 $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ και τότε αν $\lambda \in [0, 1]$ έχουμε
 $\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda x_1 - \lambda x_2 + (1-\lambda)y_1 - (1-\lambda)y_2$
 $= \underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1}_{ri(k_1)} - \underbrace{(\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2)}_{ri(k_2)} \in ri(k_1) - ri(k_2)$

Απο το (i) του Θεωρήματος τα $ri(k_1) - ri(k_2)$ και $\{0\}$ διαχωρίζονται γνήσια.

Άρα υπάρχουν $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε
 $\left\{ \begin{array}{l} \{0\} \subseteq H^+(u, c) \\ ri(k_1) - ri(k_2) \subseteq H^-(u, c) \end{array} \right\} \text{ και } \left\{ \{0\} \notin H(u, c) \text{ ή } ri(k_1) - ri(k_2) \notin H(u, c) \right\}$

Ανλαδή, $\langle u, x-y \rangle \leq c \quad \forall x \in ri(k_1) \quad \forall y \in ri(k_2)$
 $\langle u, 0 \rangle \geq c$ και
 $0 \notin H(u, c) \text{ ή } ri(k_1) - ri(k_2) \subseteq H(u, c)$

Παρατηρούμε ότι $c \leq \langle u, 0 \rangle = 0$

Επίσης, $\langle u, x \rangle \leq c + \langle u, y \rangle \quad \forall x \in ri(k_1) \quad \forall y \in ri(k_2)$

Άρα το $\{\langle u, x \rangle : x \in ri(k_1)\}$ είναι άνω φραγμένο από το $c + \langle u, y \rangle$
 $\forall y \in ri(k_2)$ και άρα

$$\sup_{x \in ri(k_1)} \langle u, x \rangle \leq c + \langle u, y \rangle \quad \forall y \in ri(k_2)$$

Αρα $\{\langle u, y \rangle : y \in r_i(k_2)\}$ είναι μη κενό και κάτω φραγμένο
 από το $\sup_{x \in r_i(k_1)} \langle u, x \rangle - c$ και άρα

$$\sup_{x \in r_i(k_1)} \langle u, x \rangle \leq c + \inf_{y \in r_i(k_2)} \langle u, y \rangle$$

Επειδή όμως $c \leq 0$ έχουμε τελικά ότι:

$$\sup_{x \in r_i(k_1)} \langle u, x \rangle \leq \inf_{y \in r_i(k_2)} \langle u, y \rangle$$

Έστω $c' \in \left[\sup_{x \in r_i(k_1)} \langle u, x \rangle, \inf_{y \in r_i(k_2)} \langle u, y \rangle \right] \neq \emptyset$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in r_i(k_1)} \langle u, x \rangle \leq c' \leq \inf_{y \in r_i(k_2)} \langle u, y \rangle$$

Τότε, $r_i(k_1) \subseteq H^-(u, c')$ και $r_i(k_2) \subseteq H^+(u, c')$

Δηλαδή, $\langle u, x \rangle \leq c' \quad \forall x \in r_i(k_1)$
 $\langle u, y \rangle \geq c' \quad \forall y \in r_i(k_2)$

Από συνέχεια του εσωτερικού γινομένου και επειδή $\overline{r_i(k_i)} = \overline{K_i}, i=1,2$
 παίρνοντας ακολουθία $x_n \rightarrow x$ με $x_n \in r_i(k_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, για
 τυχόν $x \in \overline{K_1}$, έχουμε ότι $\langle u, x \rangle \leq c' \quad \forall x \in \overline{K_1}$

Όμοια δείχνουμε ότι $\langle u, y \rangle \geq c' \quad \forall y \in \overline{K_2}$.

Αρα $\overline{K_1} \subseteq H^-(u, c') \quad (\text{άρα και το } k_1)$
 $\overline{K_2} \subseteq H^+(u, c') \quad (\text{άρα και το } k_2)$

Μένει να δείχτεί ότι η $k_1 \not\subseteq H(u, c')$ ή $k_2 \not\subseteq H(u, c')$.

Είχαμε $\langle u, x-y \rangle \leq c \quad \forall x \in r_i(k_1)$
 $\langle u, 0 \rangle \geq c \quad \forall y \in r_i(k_2)$

► Αν $c < 0$, τότε : $\sup_{x \in r_i(k_1)} \langle u, x \rangle < \inf_{y \in r_i(k_2)} \langle u, y \rangle$.

Τότε ή $c' > \sup_{x \in r_i(k_1)} \langle u, x \rangle$ ή $c' < \inf_{y \in r_i(k_2)} \langle u, y \rangle$

Αρα ή $\langle u, x \rangle < c' \quad \forall x \in r_i(k_1)$
ή $\langle u, y \rangle > c' \quad \forall y \in r_i(k_2)$

Αρα $r_i(k_1) \not\subseteq H(u, c')$ ή $r_i(k_2) \not\subseteq H(u, c')$

Αρα $k_1 \not\subseteq H(u, c')$ ή $k_2 \not\subseteq H(u, c')$

► Αν $c = 0$, από τον χρήσιμο διαχωρισμό των $r_i(k_1) - r_i(k_2)$ και $\{0\}$ πρέπει

$r_i(k_1) - r_i(k_2) \not\subseteq H(u, c)$, δηλαδή $\langle u, x - y \rangle < c = 0$ για κάποιο $x \in r_i(k_1)$ και $y \in r_i(k_2)$.
Δηλαδή $\langle u, x \rangle < \langle u, y \rangle$ για κάποιο $x \in r_i(k_1)$ και $y \in r_i(k_2)$.

Αρα δεν μπορεί, για τα x και y ταυτόχρονα να ισχύει $\langle u, x \rangle = c' = \langle u, y \rangle$.

Αρα $\langle u, x \rangle < c' \quad \text{ή} \quad \langle u, y \rangle > c'$

αρα $r_i(k_1) \not\subseteq H(u, c')$ ή $r_i(k_2) \not\subseteq H(u, c')$

Επομένως, επίσης $k_1 \not\subseteq H(u, c)$ ή $k_2 \not\subseteq H(u, c)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ και $c \in \mathbb{R}$, τα $H^+(u, c)$ και $H^-(u, c)$ λέγονται ημίστοιχοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και κλειστό τότε

$$K = \bigcap_{\substack{H \text{ ημιχώρος} \\ \text{και } H \supseteq K}} H$$

απόδειξη

Πραφανώς $K \subseteq \bigcap_{\substack{H \text{ ημιχ.} \\ H \supseteq K}} H$

Για το αντίστροφο, έστω ότι υπάρχει $x \in \bigcap_{\substack{H \text{ ημιχ.} \\ H \supseteq K}} H \setminus K$

Τότε τα $\{x\}$ και K διαχωρίζονται και μάλιστα αυστηρά.

Αρα θα υπάρχει ημιχώρος H που περιέχει το K και δεν θα περιέχει το x .

Αποπο, γιατί $x \in \bigcap_{\substack{H \text{ ημιχ.} \\ H \supseteq K}} H$. Άρα $\nexists x \in \bigcap_{\substack{H \text{ ημιχ.} \\ H \supseteq K}} H \setminus K$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και ανοικτό και $f: K \rightarrow \mathbb{R}$.

Τότε το γράφημα της f έχει υπερεπίπεδο στήριξης σε κάθε $(x, f(x))$, $x \in K$.

απόδειξη:

$$(x, f(x)) \in \partial \text{epigraph}(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in K, y \geq f(x) \}$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα για υπερεπίπεδα στήριξης κυρτών συνόλων.

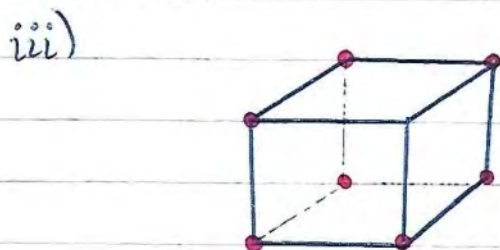
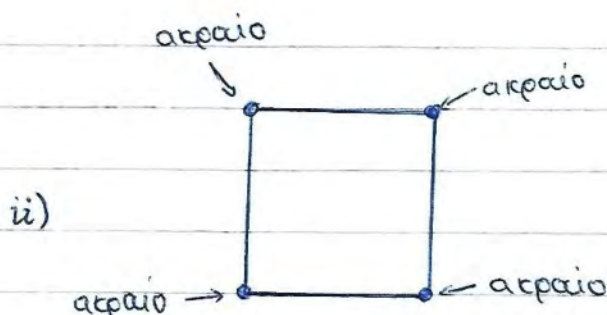
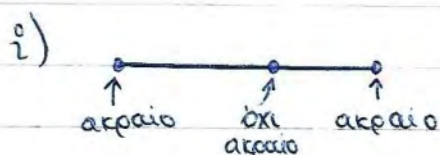
ΑΚΡΑΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΥΡΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ [ακραίο σημείο]

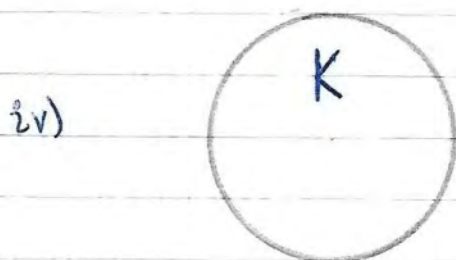
Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό και κυρτό. Ένα $x \in K$ λέγεται ακραίο σημείο του K , αν δεν υπάρχουν $y, z \in K$ τ.ω. $x \in (y, z)$.

Δηλαδή, αν $\nexists y, z \in K$ με $y \neq z$ και $\lambda \in (0, 1)$ τ.ω. $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$.

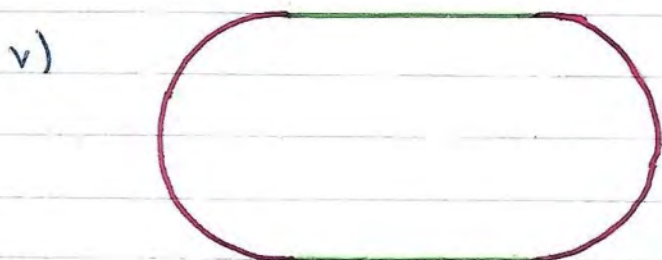
Παραδείγματα



• ακραία σημεία



όλη η περιφέρεια του κύκλου αποτελείται από ακραία σημεία.



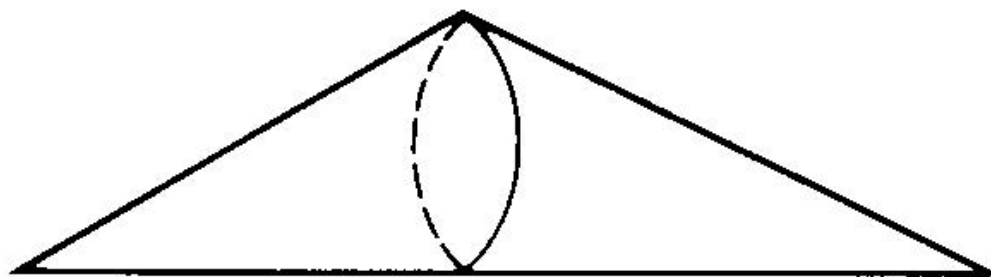
• ακραία σημεία

Το σύνολο των ακραίων σημείων ενός κλειστού και κυρτού K συνόλου συμβολίζεται με $\text{ext}(K)$

Στον $\mathbb{R}^2$ το $\text{ext}(K)$ είναι πάντα κλειστό
Ήδη στον $\mathbb{R}^3$ δεν ισχύει αυτό.

Για παράδειγμα,

$$K = \text{Conv}(\{(1,0,0), (-1,0,0)\} \cup \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z-1)^2 = 1\})$$



ΠΡΟΤΑΣΗ [Χαρακτηρισμός Ακραίων Σημείων]

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό κυρτό και $x \in K$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (1) $x \in \text{ext}(K)$
- (2) $K \setminus \{x\}$ είναι κυρτό.

απόδειξη

(1) $\Rightarrow$ (2) Έστω $x \in \text{ext}(K)$

και έστω ότι το $K \setminus \{x\}$ δεν είναι κυρτό. Τότε υπάρχουν $z, y \in K \setminus \{x\}$ τ.ω. $[z, y] \not\subseteq K \setminus \{x\}$.

Επειδή $[z, y] \subseteq K$ από κυρτότητα του K , πρέπει να

υπάρχει σημείο στο $[z, y]$ που δεν περιέχεται στο $K \setminus \{x\}$ ενώ περιέχεται στο K , και άρα πρέπει να είναι το x . Άρα $x \in [z, y]$ και $z, y \in K \setminus \{x\} \implies x \notin \{z, y\}$. Άρα $x \in (z, y) \leftarrow$ Απογο γιατί $x \in \text{ext}(K)$.

(2) $\implies$ (1) Έστω ότι $K \setminus \{x\}$ είναι κυρτό.

και έστω ότι το $x \notin \text{ext}(K)$.

Τότε $\exists y, z \in K$ και $\lambda \in (0, 1)$ τ.ω. $y \neq z$ και $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ δηλαδή $x \in (y, z)$.

Επειδή $x \in (y, z)$ έπεται ότι $x \notin \{y, z\}$. Άρα $y, z \in K \setminus \{x\}$.

Άρα πρέπει $x = \lambda y + (1 - \lambda)z \in K \setminus \{x\}$ από την κυρτότητα του $K \setminus \{x\}$. Έχουμε άτοπο.

Πρόταση:

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό και κυρτό και όχι μονοσύνολο.

Τότε $\text{ext}(K) \subseteq \text{rb}(K)$

Απόδειξη

Απο ορισμό $\text{ext}(K) \subseteq \bar{K} = K$.

Έστω $x \in \text{ri}(K)$. Έστω $y \in K \setminus \{x\}$

Απο Άσκηση 3^{ου} φυλλαδίου $\exists \mu > 1$ τ.ω. $z = y + \mu(x - y) \in K$

Τότε το $x \in (y, z)$. Πράγματι, $x = \frac{1}{\mu}z + (1 - \frac{1}{\mu})y$

και $\frac{1}{\mu} \in (0, 1)$. Έπεται ότι $x \notin \text{ext}(K)$

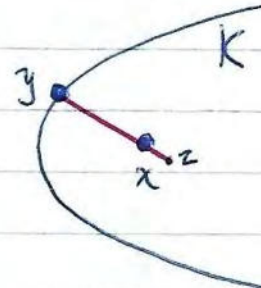
Άρα δείξαμε ότι $\text{ri}(K) \subseteq K \setminus \text{ext}(K)$

Άρα $\text{ext}(K) \subseteq K \setminus \text{ri}(K) = \text{rb}(K)$.

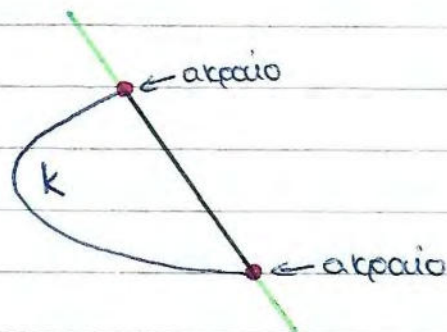
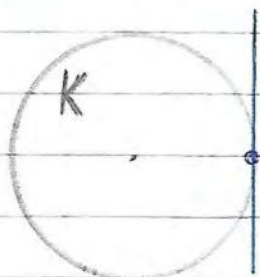
Εναλλακτική απόδειξη: Έστω $x \in \text{ri}(K)$. $\exists \delta > 0$ ώστε $\text{aff}(K) \cap U_2(x, \delta) \subseteq K$

Έστω $y \in \text{aff}(K) \cap U_2(x, \delta)$ με $y \neq x$. Τότε $2x - y \in \text{aff}(K) \cap U_2(x, \delta)$ επίσης

και $2x - y \neq x$ και $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(2x - y)$, δηλαδή $x \in (y, 2x - y)$. Άρα $x \notin \text{ext}(K)$



Πρόταση Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό και κυρτό και το $H(u, c)$ είναι ένα φέρον υπερεπίπεδο.
Τότε $\text{ext}(K \cap H(u, c)) \subseteq \text{ext}(K)$



απόδειξη

Έστω $x \in \text{ext}(K \cap H(u, c))$
και έστω ότι $x \notin \text{ext}(K)$.

Τότε $\exists y, z \in K, y \neq z, \lambda \in (0, 1)$ τω. $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, δηλαδή $x \in (y, z)$.

Τότε ή $y \notin H(u, c)$ ή $z \notin H(u, c)$, διότι διαφορετικά τότε το x θα ήταν εσωτερικό σημείο του (y, z) με τα $y, z \in H(u, c) \cap K$. και αυτό είναι άτοπο, διότι έχουμε στην υπόθεση ότι $x \in \text{ext}(K \cap H(u, c))$.

Έστω ότι $K \subseteq H^-(u, c)$.

Τότε $\langle u, y \rangle \leq c$

$\langle u, z \rangle \leq c$

και μία ανισότητα είναι γνήσια.

$$\langle u, x \rangle = \langle u, \lambda y + (1 - \lambda)z \rangle = \lambda \langle u, y \rangle + (1 - \lambda) \langle u, z \rangle < \lambda c + (1 - \lambda)c = c$$

Άρα $x \notin H(u, c)$, άτοπο.

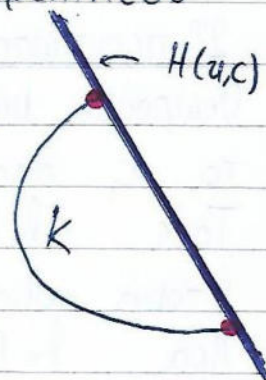
Υπενθύμιση

Αν $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό και κλειστό, ένα $x \in K$ λέγεται ακραίο αν δεν γραφεται σαν $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, $\lambda \in (0,1)$ και $y \neq z$, $y, z \in K$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό και κυρτό και H υπερεπίπεδο στήριξης του K , τότε

$$\text{ext}(H \cap K) \subseteq \text{ext}(K)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ [Minkowski]

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό, συμπαγές. Τότε

$$K = \text{conv}(\text{ext}(K))$$

απόδειξη (με επαγωγή στην διάσταση του K)

Έστω $k = \dim(K)$

- Για $k=0$ είναι σωστό.
 - Για $k=1$, $K = [x, y]$ και $\text{ext}(K) = \{x, y\}$ και το θεώρημα είναι σωστό.
 - Έστω ότι θεώρημα ισχύει για όλα τα κυρτά και συμπαγή διαστάσεις $< k$ και έστω K ένα συμπαγές, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, με $\dim(K) = k$.
- Έστω $x \in K$.

1^η περίπτωση: $x \in \text{rb}(K)$

Τότε το K έχει υπερεπίπεδο στήριξης στο x , έστω H .
 Τότε $x \in H \cap K$, και το $H \cap K$ είναι συμπαγές ως τομή

του κλειστού H με το συμπαχές K .

Επίσης είναι και κυτό, ως τομή κυτών, και επειδή $K \not\subseteq H$ έχουμε ότι $\text{aff}(K) \not\subseteq H$. Άρα έπεται ότι $\dim(K \cap H) < \dim(\text{aff}(K)) = \dim(K) = k$. Από επαγωγική υπόθεση το $x \in \text{conv}(\text{ext}(H \cap K)) \subseteq \text{conv}(\text{ext}(K))$ επειδή $\text{ext}(H \cap K) \subseteq \text{ext}(K)$

2^η περίπτωση $x \in \text{ri}(K)$

Θεωρούμε μία ευθεία $l_x = \{x + t u : t \in \mathbb{R}\}$ που περνάει από το x , όπου $u \in \mathbb{R}^d$ με $\|u\|_2 = 1$.

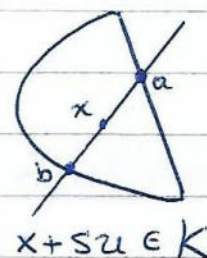
Τότε $l_x \cap K$ είναι κυτό (τομή κυτών), συμπαχές (τομή συμπαχούς K με κλειστό) και έχει $\dim(l_x \cap K) = 1$. Άρα $l_x \cap K = [a, b]$ ευθύγραμμο τμήμα, όπου $a, b \in K$ και μάλιστα $a, b \in \text{rb}(K)$.

Πράγματι, κατορθών $a = x + t u$ για κάποιο $t \in \mathbb{R}$.

Εστω ότι $a \in \text{ri}(K)$. Τότε $\exists \delta > 0$ τ.ω.

$U_2(a, \delta) \cap \text{aff}(K) \subseteq K$ και τότε τα σημεία $x + s u \in K$ για κάθε $s \in (t - \delta, t + \delta)$.

Τότε $[x + s u, b]$ για κάποιο $s \in (t - \delta, t + \delta)$ είναι μεγαλύτερο από το $[a, b]$ και περιέχεται στο $l_x \cap K$. Αποπο.



Όμοια για το $b \in \text{rb}(K)$ και άρα $a, b \in \text{Conv}(\text{ext}(K))$ από την περίπτωση 1. Άρα από κυτότητα ένα $[a, b] \in \text{Conv}(\text{ext}(K))$ και $x \in [a, b]$. Άρα $x \in \text{Conv}(\text{ext}(K))$. Αυτό δείχνει ότι $K \subseteq \text{Conv}(\text{ext}(K))$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση είναι προφανές, διότι $\text{ext}(K) \subseteq K$. Επειδή K κυτό πρέπει $\text{Conv}(\text{ext}(K)) \subseteq K$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω συνάρτηση $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή και συνεχής στο μη-κενό, κυρτό και συμπαγές K . Τότε υπάρχει $x_0 \in \text{ext}(K)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \max \{ f(x) : x \in K \}$$

απόδειξη

Καταρχήν η f έχει μέγιστο γιατί είναι συνεχής συνάρτηση σε συμπαγές σύνολο.

Έστω x_0 ένα τέτοιο σημείο τ.ω. $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in K$.
Από το Θεώρημα Minkowski υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in \text{ext}(K)$
και $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, 1]$ με $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ τέτοια ώστε

$$x_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$$

Έστω τώρα ότι $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in \text{ext}(K)$

Τότε
$$f(x_0) = f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) < \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_0) = f(x_0) \quad \leftarrow$$

επειδή $f(x_i) < f(x_0) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$ και $\lambda_i > 0$ για κάποιον i , επειδή $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ ΑΤΟΠΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1

Αν $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κοίλη, όπου $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό συμπαγές, τότε $\exists x_0 \in \text{ext}(K)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in K$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2

Αν η $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αφηνική ($f(x) = \langle a, x \rangle + b$, $a \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$) τότε $\exists x_1, x_2 \in \text{ext}(K)$ τέτοια ώστε: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in K$, εφόσον $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό και συμπαγές.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυτό και συμπαγές και $A \subseteq K$ τέτοιο, ώστε $K = \text{conv}(A)$. Τότε $A \supseteq \text{ext}(K)$.

απόδειξη

Έστω ένα τέτοιο A και έστω $x \in \text{ext}(K) \setminus A$

$$K = \text{conv}(A) = \text{conv}(A \setminus \{x\}) \subseteq \text{conv}(K \setminus \{x\}) = K \setminus \{x\}$$

ΑΤΟΠΟ.

Άρα $\nexists x \in \text{ext}(K) \setminus A$

↑
επειδή $x \in \text{ext}(K)$ και
άρα $K \setminus \{x\}$ κυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ (KREIN - MILMAN)

Έστω X τοπικά συμπαγής τοπολογικός διανυσματικός χώρος (π.χ. χώρος Hilbert ή χώρος Banach). Έστω $K \subseteq X$ που είναι συμπαγές και κυτό. Τότε

$$K = \overline{\text{conv}(\text{ext}(K))}$$

Ειδικότερα, αν $K \neq \emptyset$, τότε $\text{ext}(K) \neq \emptyset$.

Πορίσμα

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό συμπαγές, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή που έχει μέγιστο στο K .
Τότε $\exists x_0 \in \text{ext}(K)$ τέω. $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in K$.

Ειδικότερα αυτό συμβαίνει όταν η f είναι κυρτή κ' συνεχής στο K .

ΠΟΛΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟΟΡΙΣΜΟΣ [Πολικό σύνολο]

Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^d$. Το πολικό του A είναι το σύνολο

$$A^\circ = \{ y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1 \quad \forall x \in A \}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ : Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^d$

1) $0 \in A^\circ$ και άρα $A^\circ \neq \emptyset$

2) A° είναι κυρτό και κλειστό

αποδείξην

► Έστω $y, z \in A^\circ$, $\lambda \in (0, 1)$. Τότε
 $\langle x, \lambda y + (1-\lambda)z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + (1-\lambda) \langle x, z \rangle \leq \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$
 Άρα $\lambda y + (1-\lambda)z \in A^\circ$ και άρα A° είναι κυρτό

► Έστω $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο A° και έστω $y_n \rightarrow y$ για κάποιο $y \in \mathbb{R}^d$.

Τότε για $x \in A$

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, y_n \rangle \leq 1$$

Έπεται ότι $y \in A^\circ$, άρα A° είναι κλειστό

3) Αν το A είναι φραγμένο τότε $0 \in \text{int}(A^\circ)$, δηλαδή υπάρχει $r > 0$ τ.ω. $B_2(0, r) \subseteq A^\circ$.
αποδείξτε

Έστω $M \in (0, +\infty)$ τ.ω. $\|x\|_2 \leq M \quad \forall x \in A$.

Έστω $y \in B_2(0, \frac{1}{M})$. Τότε $\langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \leq M \frac{1}{M} = 1 \quad \forall x \in A$

Άρα $y \in A^\circ$, δηλαδή $B_2(0, \frac{1}{M}) \subseteq A^\circ$.

4) Αν το $0 \in \text{int}(A)$, τότε το A° είναι φραγμένο.

αποδείξτε

Έστω $y \in A^\circ \setminus \{0\}$. Έστω $r > 0$ τ.ω. $B_2(0, r) \subseteq A$ (υπάρχει μία τέτοια κλειστή μπάλα, εφόσον υπάρχει $U_2(0, r'') \subseteq A$)

Για $x \in B_2(0, r) \subseteq A$, πρέπει $\langle x, y \rangle \leq 1$

Έστω $x = \frac{y}{\|y\|_2} r$. Τότε $x \in B_2(0, r)$.

Άρα πρέπει $\langle x, y \rangle \leq 1 \iff \frac{r}{\|y\|_2} \langle y, y \rangle \leq 1 \iff$

$$r \|y\|_2 \leq 1 \iff \|y\|_2 \leq \frac{1}{r}$$

Άρα έπεται ότι το A είναι φραγμένο, διότι $\|y\|_2 \leq \frac{1}{r} \quad \forall y \in A$.

Παραδείγματα

(1) Έστω $A = B_2(0, 1)$

Έστω $y \in B_2(0, 1)$. Τότε $\forall x \in B_2(0, 1) \quad \langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \leq 1$

Άρα $B_2(0, 1) \subseteq [B_2(0, 1)]^\circ = A^\circ$

Έστω $y \in A^\circ = [B_2(0,1)]^\circ$.

Τότε $\langle x, y \rangle \leq 1 \quad \forall x \in B_2(0,1)$. Άρα ειδικότερα αν $y \neq 0$

$$\left\langle \frac{y}{\|y\|_2}, y \right\rangle \leq 1 \iff \|y\|_2 \leq 1$$

Αυτό δείχνει ότι $[B_2(0,1)]^\circ \subseteq B_2(0,1)$

Άρα $[B_2(0,1)]^\circ = B_2(0,1)$

(2) $A = B_\infty(0,1)$, όπου $B_\infty(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_\infty \leq 1\}$,
όπου $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |x_i|$

Έστω $y \in B_1(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq 1\}$, όπου $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$

Τότε για $x \in B_\infty(0,1)$ *

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i \leq \sum_{i=1}^d |x_i| |y_i| \stackrel{*}{\leq} \sum_{i=1}^d |y_i| = \|y\|_1 \leq 1$$

Έπεται ότι $B_1(0,1) \subseteq [B_\infty(0,1)]^\circ$

Έστω $y \in [B_\infty(0,1)]^\circ$. Συμβολισμός $\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t = 0 \\ -1 & , t < 0 \end{cases}$

Έστω $x_i = \text{sign}(y_i)$ για $i \in \{1, \dots, d\}$. Τότε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i = \sum_{i=1}^d |y_i| = \|y\|_1$$

Επίσης $x = (x_1, \dots, x_d) \in B_\infty(0,1)$, επειδή $|x_i| \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$

Άρα πρέπει $\|y\|_1 = \langle x, y \rangle \leq 1$.

Δείξαμε και τον εγκλεισμό $[B_\infty(0,1)]^\circ \subseteq B_1(0,1)$

Άρα $[B_\infty(0,1)]^\circ = B_1(0,1)$

Άσκηση

$[B_p(0,1)]^\circ = ?$ όπου $p \in [1, +\infty)$

ΘΕΩΡΗΜΑ [Διπολικό Θεώρημα]

Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^d$, έχουμε ότι

$$(A^\circ)^\circ = A^{\circ\circ} = \overline{\text{Conv}(A \cup \{0\})}$$

Ειδικότερα, αν A είναι κυρτό, κλειστό και $0 \in A$, τότε $A^{\circ\circ} = A$.

απόδειξη

$0 \in A^{\circ\circ}$ από παρατήρηση 1

Ισχυρισμός: $A \subseteq A^{\circ\circ}$

Έστω $x \in A$ και $y \in A^\circ$. Τότε $\langle x, y \rangle \leq 1$

Αρα για $x \in A$, έχουμε ότι $\langle x, y \rangle \leq 1 \quad \forall y \in A^\circ$, άρα $x \in (A^\circ)^\circ$

Αρα $A \cup \{0\} \subseteq A^{\circ\circ}$, άρα $\text{Conv}(A \cup \{0\}) \subseteq A^{\circ\circ}$ (επειδή $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$ κυρτό αναγκαστικά - Παρατήρηση 2)

Άρα και $\overline{\text{Conv}(A \cup \{0\})} \subseteq A^{\circ\circ}$ (επειδή $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$ κλειστό - Παρατήρηση 2).

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω ότι δεν ισχύει.

Τότε $\exists x \in A^{\circ\circ} \setminus \overline{\text{Conv}(A \cup \{0\})}$.

Ισχύουν τα εξής: $\overline{\text{Conv}(A \cup \{0\})}$ κυρτό, κλειστό και $\{x\}$ συμπαγές κυρτό.

Άρα $\{x\}$ και $\overline{\text{Conv}(A \cup \{0\})}$ διαχωρίζονται αυστηρά

Άρα υπάρχουν: $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ τ.ω. $\langle u, y \rangle < c - \varepsilon \quad \forall y \in \overline{\text{Conv}(A \cup \{0\})}$
 $\langle u, x \rangle > c + \varepsilon$

Επειδή $y = 0 \in \overline{\text{Conv}(A \cup \{0\})}$ πρέπει $0 = \langle u, 0 \rangle < c - \varepsilon$, άρα $c > 0$

Έστω $v = \frac{u}{c}$

Τότε $\langle v, y \rangle = \frac{1}{c} \langle u, y \rangle < 1 \quad \forall y \in \overline{\text{Conv}(\text{Αυξοξ})}$
 άρα και $\forall y \in A$

Επεται ότι $v \in A^\circ$

Επίσης $\langle v, x \rangle = \frac{1}{c} \langle u, x \rangle > \frac{1}{c} \cdot c = 1$

Αυτό είναι άτοπο, γιατί θα έπρεπε $\langle v, x \rangle \leq 1$ επειδή $v \in A^\circ$ και $x \in (A^\circ)^\circ$

Άρα τελικά, $\nexists x \in A^{\circ\circ} \setminus \overline{\text{Conv}(\text{Αυξοξ})}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές και κυρτό και $o \in \text{int}(K)$.
 Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) $y \in \partial(K)^\circ$

(2) ο ημίχωρος $H^-(y, 1)$ στηρίζεται το K , δηλαδή
 $K \subseteq H^-(y, 1)$ και $K \cap H(y, 1) \neq \emptyset$.

απόδειξη

(1) $\Rightarrow$ (2) Έστω $y \in \partial(K)^\circ$

Τότε, επειδή K° κλειστό από Παρατήρηση 2, έχουμε
 $y \in \partial(K)^\circ \subseteq K^\circ$, και άρα $\langle x, y \rangle \leq 1 \quad \forall x \in K$

Επομένως, $K \subseteq H^-(y, 1)$.

Μένει να δείξουμε ότι $K \cap H(y, 1) \neq \emptyset$. Έστω ότι $K \cap H(y, 1) = \emptyset$.

Τότε $\max_{x \in K} \langle x, y \rangle < 1$

Άρα υπάρχει $t > 1$ τ.ω. $\max_{x \in K} \langle x, ty \rangle = 1 \quad \left(t = \frac{1}{\max_{x \in K} \langle x, y \rangle} \right)$

Τότε $ty \in K^\circ$. Αλλά $o \in \text{int}(K^\circ)$ επειδή K φραγμένο (Παρατ. 3).
 Γνωρίζουμε ότι K° κυρτό, άρα $[o, ty] \subseteq \text{int}(K^\circ)$

Άρα $y \in [0, ty) \subseteq \text{int}(K^\circ)$,
 Απογο, γιατί $y \in \partial(K^\circ)$

$$y = \frac{1}{t}(ty) + (1 - \frac{1}{t})0$$

- Θα αποδείξουμε και τον ισχυρισμό που χρησιμοποιήσαμε: ότι $t = \frac{1}{\max_{x \in K} \langle x, y \rangle}$ υπάρχει και είναι θετικό.
 Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι $\max_{x \in K} \langle x, y \rangle > 0$.

$\max_{x \in K} \langle x, y \rangle \neq 0$, διότι το K περιέχει μια ανοικτή μπάλα $U_2(0, r)$ και άρα αν $y \neq 0$ πρέπει:
 $\max_{x \in K} \langle x, y \rangle \geq \langle \frac{y}{2\|y\|_2} r, y \rangle = \frac{r}{2} > 0$

Επίσης $y \neq 0$, διότι $y \in \partial(K^\circ)$ και $0 \in \text{int}(K^\circ)$ επειδή K φραγμένο.

(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω $\langle z, y \rangle \leq 1 \quad \forall z \in K$ και υπάρχει $x \in K$ τ.ω. $\langle x, y \rangle = 1$.
 Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $y \in \partial(K^\circ)$

Έστω ότι $y \in \text{int}(K^\circ)$.

Τότε υπάρχει $t > 1$ τ.ω. $ty \in K^\circ$. Πράγματι, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $U_2(y, \delta) \subseteq K^\circ$. Επίσης $0 \in K^\circ$

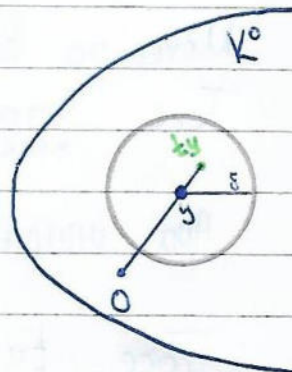
$$\text{Τότε } t = 1 + \frac{\delta}{2\|y\|_2}$$

Τότε $\|ty - y\|_2 = \frac{\delta}{2} < \delta$, άρα $ty \in U_2(y, \delta) \subseteq K^\circ$

Τότε $\langle z, ty \rangle \leq 1 \quad \forall z \in K$

$$\text{Ειδικά } \langle x, ty \rangle \leq 1 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \frac{1}{t} < 1$$

Απογο, επειδή $\langle x, y \rangle = 1$.



ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

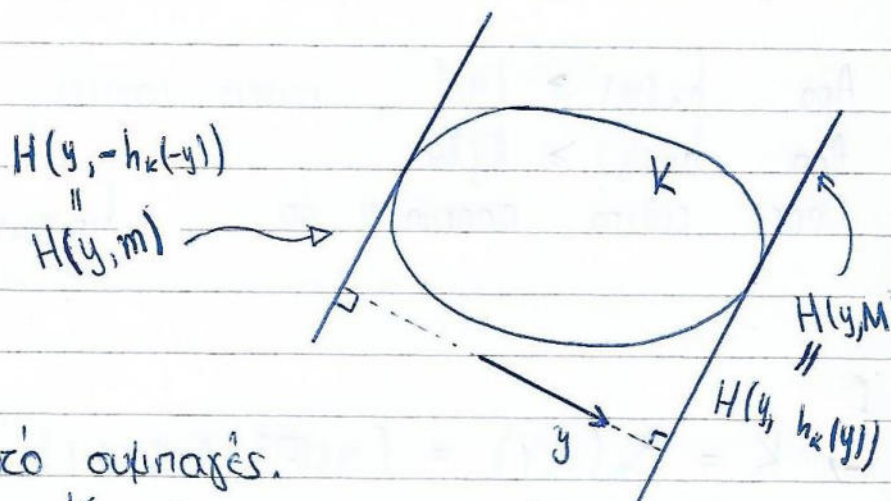
Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σύνολο.

Η συνάρτηση $x \mapsto \langle x, y \rangle$ είναι συνεχής συνάρτηση για $y \in \mathbb{R}^d$ σταθερό και άρα υπάρχουν τα:

$$M = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle \quad \text{και} \quad m = \min_{x \in K} \langle x, y \rangle$$

για σταθερό y , επειδή K σύνολο.

Τότε $H^-(y, m)$ στήριζει το K και $H^+(y, M)$ στήριζει το K .



ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σύνολο.

Η συνάρτηση στήριξης του K είναι η συνάρτηση

$$h_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad h_K(y) = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle$$

Άρα ο ημίχωρος $H^-(y, h_K(y))$ στήριζει το K , δηλαδή $K \subseteq H^-(y, h_K(y))$ και $K \cap H(y, h_K(y)) \neq \emptyset$.

Παρατήρηση : $-h_K(-y) = -\max_{x \in K} \langle x, -y \rangle = \min_{x \in K} \langle x, y \rangle$

$$\text{και} \quad K \subseteq H^+(y, -h_K(-y))$$

Παραδείγματα

1) $K = B_1(0,1)$ $h_K(y) \equiv h_{B_1(0,1)}(y)$

$$h_K(y) = \max_{x \in B_1(0,1)} \langle x, y \rangle$$

Έστω $y \in \mathbb{R}^d$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i \leq \sum_{i=1}^d |x_i| |y_i| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1 \leq \|y\|_\infty$
για $x \in B_1(0,1)$.

Αυτό δείχνει ότι $h_K(y) \leq \|y\|_\infty$

Έστω $x_i = \operatorname{sgn}(y_i) e_i$ για $i \in \{1, \dots, d\}$, άρα $x_i \in B_1(0,1) \forall i \in \{1, \dots, d\}$
 $\langle x, y \rangle = \operatorname{sgn}(y_i) \langle e_i, y \rangle = \operatorname{sgn}(y_i) y_i = |y_i|$

Άρα $h_K(y) \geq |y_i|$, αυτό ισχύει $\forall i \in \{1, \dots, d\}$

Άρα $h_K(y) \geq \|y\|_\infty$

Οπότε τελικά προκύπτει ότι: $h_{B_1(0,1)}(y) = \|y\|_\infty$

2) $K = B_p(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p \leq 1\}$ όπου $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{1/p}$

και $1 < p < +\infty$

Έστω $q \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p = \frac{q}{q-1}$

Έστω $y \in \mathbb{R}^d$ και $x \in B_p(0,1)$, τότε

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q \leq \|y\|_q$$

↑
Holder

Άρα $h_{B_p(0,1)}(y) = \max_{x \in B_p(0,1)} \langle x, y \rangle \leq \|y\|_q$

Ορίσουμε $x = (x_1, \dots, x_d)$ με $x_i = \operatorname{sgn}(y_i) |y_i|^{q-1} \|y\|_q^{-\frac{q-1}{p}}$

Τότε, $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^d |x_i|^p = \sum_{i=1}^d |y_i|^{(q-1)p} \|y\|_q^{-q} = \|y\|_q^q \|y\|_q^{-q} = 1$

Αρα $x \in B_p(0,1)$

Μένει να δείξουμε ότι $\langle x, y \rangle = \|y\|_q$

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^d x_i y_i = \sum_{i=1}^d |y_i|^q \|y\|_q^{-q/p} \\ &= \|y\|_q^{q - \frac{q}{p}} \\ &= \|y\|_q\end{aligned}$$

Αρα $h_{B_p(0,1)} \geq \langle x, y \rangle = \|y\|_q$

Τελικά,

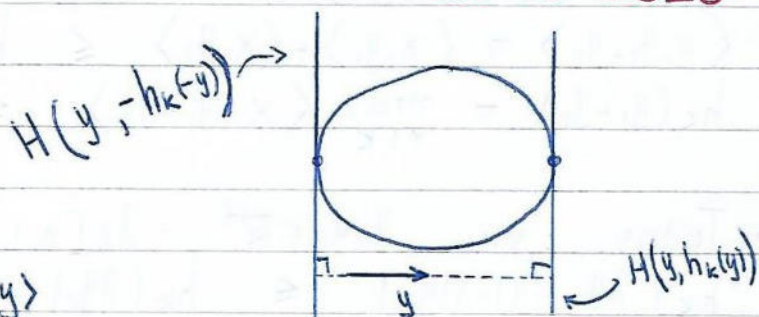
$$h_{B_p(0,1)}(y) = \|y\|_q$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

$\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυτό συμπαγές.

Για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$ η $x \mapsto \langle x, y \rangle$

είναι συνεχής και ορίζουμε $h_K(y) = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle$



Παρατήρηση:

$$-h_K(-y) = -\max_{x \in K} \langle x, -y \rangle = \min_{x \in K} \langle x, y \rangle$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Έστω $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυτό, συμπαγές.

- 1] h_K είναι θετικά ομογενής και υποπροσθετική, άρα κυρή.
- 2] $h_{\lambda K} = \lambda h_K$, $\lambda > 0$ $\lambda K = \{u \in \mathbb{R}^d : u = \lambda x, x \in K\}$
- 3] $h_{K_1+K_2} = h_{K_1} + h_{K_2}$ για $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^d$, μη κενά, σφπαγή και κυτά.

Απόδειξη (1)

• Έστω $\lambda > 0$, $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \leq \lambda \max_{x \in K} \langle x, y \rangle = \lambda h_K(y)$
για κάθε $x \in K$.

Άρα $\lambda h_K(y)$ είναι άνω φράγμα του μη-κενού συνόλου $\{\langle x, \lambda y \rangle : x \in K\}$
και άρα $\sup_{x \in K} \langle x, \lambda y \rangle \leq \lambda h_K(y) \iff h_K(\lambda y) \leq \lambda h_K(y)$

Αντίστροφα, για $x \in K$, $\lambda > 0$

$$\langle x, y \rangle = \lambda^{-1} \langle x, \lambda y \rangle \leq \lambda^{-1} \max_{x \in K} \langle x, \lambda y \rangle = \frac{1}{\lambda} h_K(\lambda y)$$

$$\text{Άρα } h_K(y) = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq \frac{1}{\lambda} h_K(\lambda y) \iff h_K(\lambda y) \leq \lambda h_K(y)$$

$$\text{Άρα τελικά } \lambda h_K(y) = h_K(\lambda y)$$

• Για την υποπροσθετικότητα: Έστω $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$ και $x \in K$

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \leq h_K(y_1) + h_K(y_2), \text{ άρα}$$

$$h_K(y_1 + y_2) = \max_{x \in K} \langle x, y_1 + y_2 \rangle \leq h_K(y_1) + h_K(y_2)$$

• Τέλος, για $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in [0, 1]$

$$h_K(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq h_K(\lambda y_1) + h_K((1-\lambda)y_2) = \lambda h_K(y_1) + (1-\lambda)h_K(y_2)$$

και αυτό δείχνει κυρτότητα για την h_K .

Απόδειξη (2)

Για $y \in \mathbb{R}^d$ και $x \in K$ και $\lambda > 0$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \leq \lambda h_K(y) \quad \forall x \in K.$$

Δηλαδή $\max_{x \in K} \langle \lambda x, y \rangle \leq \lambda h_K(y) \iff$

$$\iff \max_{x' \in \lambda K} \langle x', y \rangle = \max_{x \in K} \langle \lambda x, y \rangle \leq \lambda h_K(y)$$

Άρα $h_{\lambda K}(y) \leq \lambda h_K(y)$

Όμοια για $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^d$ και $\lambda > 0$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \lambda x, y \rangle \leq \frac{1}{\lambda} h_{\lambda K}(y)$$

Άρα $h_K(y) = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq \frac{1}{\lambda} h_{\lambda K}(y) \iff \lambda h_K(y) \leq h_{\lambda K}(y)$

Συνεπώς, $\lambda h_K(y) = h_{\lambda K}(y)$

Απόδειξη (3)

• Έστω $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$ και $y \in \mathbb{R}^d$. Τότε

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \leq h_{K_1}(y) + h_{K_2}(y)$$

Άρα $\max_{x_1 \in K_1, x_2 \in K_2} \langle x_1 + x_2, y \rangle \leq h_{K_1}(y) + h_{K_2}(y)$

$$\iff \max_{x \in K_1 + K_2} \langle x, y \rangle \leq h_{K_1}(y) + h_{K_2}(y)$$

$$\Leftrightarrow h_{K_1+K_2}(y) \leq h_{K_1}(y) + h_{K_2}(y)$$

• Έστω πάλι $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2, y \in \mathbb{R}^d$, τότε

$$h_{K_1+K_2}(y) \geq \langle x_1+x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\Leftrightarrow h_{K_1+K_2}(y) - \langle x_2, y \rangle \geq \langle x_1, y \rangle$$

Για σταθερό x_2 ο αριθμός $h_{K_1+K_2}(y) - \langle x_2, y \rangle$ είναι άνω φράγμα του $\{\langle x, y \rangle : x \in K_1\}$, άρα

$$\max_{x \in K_1} \langle x, y \rangle \leq h_{K_1+K_2}(y) - \langle x_2, y \rangle$$

$$\Leftrightarrow h_{K_1}(y) \leq h_{K_1+K_2}(y) - \langle x_2, y \rangle \quad \text{αυτό ισχύει } \forall x_2 \in K_2$$

$$\text{Άρα } \langle x_2, y \rangle \leq h_{K_1+K_2}(y) - h_{K_1}(y) \quad \forall x_2 \in K_2$$

$$\text{Άρα } \max_{x' \in K_2} \langle x', y \rangle \leq h_{K_1+K_2}(y) - h_{K_1}(y)$$

$$\Leftrightarrow h_{K_2}(y) \leq h_{K_1+K_2}(y) - h_{K_1}(y)$$

$$\Leftrightarrow h_{K_1}(y) + h_{K_2}(y) \leq h_{K_1+K_2}(y)$$

$$\text{Άρα } h_{K_1+K_2}(y) = h_{K_1}(y) + h_{K_2}(y)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενά, κυρτά και συμπαγή.

Τότε, $K_1 \subseteq K_2$ ανν $h_{K_1} \leq h_{K_2}$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενά, κυρτά και συμπαγή.

Τότε $K_1 = K_2$ ανν $h_{K_1} = h_{K_2}$

Απόδειξη Θεωρήματος

($\Rightarrow$) Έστω $K_1 \subseteq K_2$

$$h_{K_1}(y) = \max_{x \in K_1} \langle x, y \rangle \leq \max_{x \in K_2} \langle x, y \rangle = h_{K_2}(y)$$

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω $h_{K_1} \leq h_{K_2}$

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $x \in K_1 \setminus K_2$

Τότε τα $\{x\}$ και K_2 διαχωρίζονται αυστηρά

Δηλαδή υπάρχουν: $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ τ.ω.

$$\langle u, y \rangle < c - \varepsilon \quad \forall y \in K_2$$

$$\langle u, x \rangle > c + \varepsilon$$

$$\text{Τότε,} \quad h_{K_2}(u) < c - \varepsilon < c < c + \varepsilon < \langle u, x \rangle \leq h_{K_1}(u)$$

$\uparrow$
επειδή $x \in K_1$

Ατοπο, γιατί $h_{K_1} \leq h_{K_2}$ παντού

ΠΟΡΙΣΜΑ Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές και κυρτό.

Τότε, $h_K \geq 0$ ανν $0 \in K$

απόδειξη

$$h_{\{0\}}(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^d \quad \text{και} \quad \text{άρα} \quad \{0\} \subseteq K \Leftrightarrow 0 \leq h_K$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Κάθε $K \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές και κυρτό και με $\text{int}(K) \neq \emptyset$ λέγεται κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ συμμετρικό κυρτό σώμα.

Τότε, η $h_K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ είναι νόρμα.

Σημείωση: $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι συμμετρικό αν $x \in A \Rightarrow -x \in A$
Ισοδύναμα, αν $A = -A$

απόδειξη θεωρήματος

K κυρτό σώμα $\Rightarrow \text{int}(K) \neq \emptyset \Rightarrow K \neq \emptyset$.

Επειδή το K είναι συμμετρικό, τότε $0 \in K$. Πράγματι, $\exists x \in K$
και άρα $-x \in K$ και τότε $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in K$ από
κυρτότητα. Άρα $h_K(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^d$

Ισχυρισμός: $0 \in \text{int}(K)$

$\hookrightarrow$ απόδειξη:

Υπάρχει $x \in \text{int}(K)$, άρα υπάρχει $r > 0$ τ.ω. $B_2(x, r) \subseteq K$

Επειδή K συμμετρικό, έχουμε ότι $B_2(-x, r) \subseteq K$, διότι κάθε
σημείο $y \in B_2(-x, r)$ γράφεται σαν $y = -y'$, όπου $y' \in B_2(x, r)$
Τότε $B_2(0, r) \subseteq K$. Γιατί αν $y \in B_2(0, r)$, τότε

$$y = \frac{1}{2}(y+x) + \frac{1}{2}(y-x)$$

και $y+x \in B_2(x, r)$ και $y-x \in B_2(-x, r)$

άρα $y+x, y-x \in K$ και άρα $y \in K$ από κυρτότητα του K .
Επεται ότι $B_2(0, r) \subseteq K$ (τέλος απόδειξης ισχυρισμού)

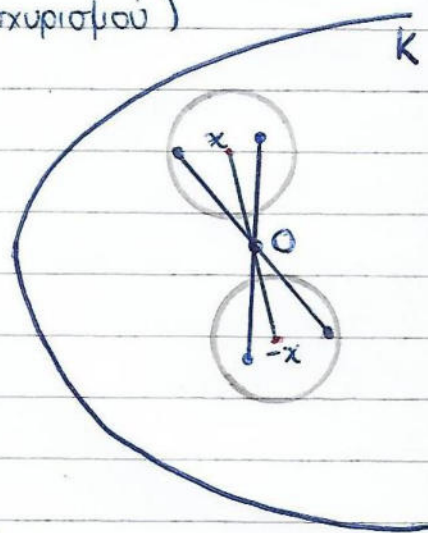
Εστω $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$

Τότε $\frac{y}{\|y\|_2} r \in B_2(0, r) \subseteq K$

Άρα $h_K(y) \geq \left\langle \frac{y}{\|y\|_2} r, y \right\rangle = \|y\|_2 r > 0$

Άρα δείξαμε ότι $h_K(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Εστω $\lambda > 0$ και $y \in \mathbb{R}^d$. Τότε $h_K(\lambda y) = \lambda h_K(y)$



$$\begin{aligned} \text{Εστω } \lambda < 0 \quad & \begin{matrix} -\lambda > 0 \\ \downarrow \end{matrix} \\ h_K(\lambda y) &= \max_{x \in K} \langle x, \lambda y \rangle = \max_{x \in K} \langle -x, -\lambda y \rangle \stackrel{\downarrow}{=} -\lambda \max_{x \in K} \langle -x, y \rangle = \\ &= -\lambda \max_{x \in -K} \langle x, y \rangle = -\lambda \max_{-x \in K} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{από συμμετρία} \\ &= -\lambda \max_{x \in K} \langle x, y \rangle = |\lambda| h_K(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Τέλος, για } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d \\ h_K(y_1 + y_2) &\leq h_K(y_1) + h_K(y_2) \quad (\text{από ιδιότητα 1}) \end{aligned}$$

Άρα η h_K είναι νόρμα.

Υπενθύμιση: Αν K κυρτό σώμα, συμμετρικό, τότε g_K είναι νόρμα.
 $K = \{x \in \mathbb{R}^d : g_K(x) \leq 1\}$, δηλαδή για συμμετρικό κυρτό σώμα, το K είναι η μοναδιαία μπάλα της νόρμας g_K

Ορισμός (υπενθύμιση)

K κλειστό, κυρτό, $0 \in \text{int}(K)$ $g_K = \inf\{t > 0 : x \in tK\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$ θετικά ομογενής και κυρτή συνάρτηση.
 Τότε, υπάρχει μοναδικό κυρτό, κλειστό $K \subseteq \mathbb{R}^d$ με $0 \in \text{int}(K)$
 τέτοιο ώστε $g_K = g$.

αποδείξη

Ορίζουμε $K = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \leq 1\}$

Η g είναι συνεχής, διότι είναι ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}^d$ που είναι ανοικτό και επιπλέον είναι κυρτή.

Αρα $K = g^{-1}((-\infty, 1])$, είναι κλειστό σύνολο

Το K είναι επίσης κυρτό. Πράγματι, έστω $x, y \in K$ και $\lambda \in [0, 1]$, τότε :

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$$

Αρα, $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

Απο την συνέχεια της g , και θετική ομογένεια, για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}^d$
 $t g(x) = g(tx)$ για $t > 0$, και παίρνοντας όριο
 καθώς $t \downarrow 0$ προκύπτει : $0 = g(0)$.

Επειδή λοιπόν η g είναι συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.
 $|g(x) - g(0)| = |g(x)| < 1 \quad \forall x \in U_2(0, \delta)$

Επομένως $U_2(0, \delta) \subseteq K$, άρα τελικά $0 \in \text{int}(K)$.

Μένει να δείξουμε ότι το συναρτησοειδές Minkowski του K (ή η συνάρτηση σταθμής του K) είναι ίδιο με την συνάρτηση g .

Έστω $x \in \mathbb{R}^d$. Έστω $g(x) > 0$, τότε

$$1 = \frac{g(x)}{g(x)} = g\left(\frac{1}{g(x)} x\right) \quad \text{και άρα} \quad \frac{1}{g(x)} x \in K$$

$$\iff x \in g(x)K \implies g_K(x) \leq g(x)$$

Γνωρίζουμε ότι η g_K είναι επίσης θετικά ομογενής. Άρα, αν $g_K(x) > 0$, τότε:

$$1 = g_K\left(\frac{1}{g_K(x)} x\right) \quad \text{άρα} \quad \frac{1}{g_K(x)} x \in K \quad \text{και άρα}$$

$$g\left(\frac{1}{g_K(x)} x\right) \leq 1 \quad \iff \quad \frac{1}{g_K(x)} g(x) \leq 1$$

$\uparrow$
θετική ομογένεια της g

$$\implies g(x) \leq g_K(x)$$

Αν $g(x) = 0$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε

$$t g(x) = 0 \iff g(tx) = 0 \quad \text{για κάθε } t > 0$$

$$\text{άρα } tx \in K \quad \forall t > 0 \implies x \in t^{-1}K \quad \forall t > 0 \quad \text{ή} \quad x \in sK \quad \forall s > 0$$

$$\text{Επεται ότι } g_K(x) = 0. \quad (\text{ιδιότητα 2})$$

Αν $g_K(x) = 0$, τότε $tx \in K \quad \forall t > 0$, άρα

$$g(tx) \leq 1 \quad \forall t > 0, \quad \text{άρα} \quad t g(x) \leq 1 \quad \forall t > 0$$

$$\text{άρα} \quad g(x) \leq \frac{1}{t} \quad \forall t > 0 \quad \text{και αν πάρουμε όριο για}$$

$$t \rightarrow \infty, \quad \text{επεται ότι } g(x) = 0.$$

Σχέση μεταξύ Συναρτήσεως Στήριξης - Συναρτήσεως Σταθμής

ΘΕΩΡΗΜΑ

- (α) Έστω K συμπαγές, κυρτό με $0 \in K$. Τότε το K° είναι κλειστό, κυρτό και $0 \in \text{int}(K^\circ)$ και $h_K = g_{K^\circ}$
- (β) Έστω K κυρτό, κλειστό με $0 \in \text{int}(K)$. Τότε το K° είναι συμπαγές, κυρτό και $h_{K^\circ} = g_K$

Απόδειξη (α)

K° είναι κλειστό & κυρτό πάντα και $0 \in K^\circ$ πάντα.
Επειδή το K είναι συμπαγές, άρα φραγμένο, έπεται ότι $0 \in \text{int}(K^\circ)$, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $U_2(0, \delta) \subseteq K^\circ$.

Έπεται ότι g_{K° είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.

Έστω $y \in \mathbb{R}^d$ και $t > g_{K^\circ}(y)$, τότε $y \in tK^\circ$

$$\Leftrightarrow t^{-1}y \in K^\circ \Rightarrow \langle x, t^{-1}y \rangle \leq 1 \quad \forall x \in K$$

$$\text{Άρα } \langle x, y \rangle \leq t \quad \forall x \in K \quad \text{και άρα } \max_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq t$$

Παίρνοντας όριο καθώς $t \downarrow g_{K^\circ}$ παίρνουμε ότι

$$h_K(y) = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq g_{K^\circ}(y)$$

Επειδή $\{0\} \subseteq K$ έπεται ότι $h_K \geq 0$.

Έστω $y \in \mathbb{R}^d$ με $h_K(y) > 0$, τότε η ανισότητα $\langle x, y \rangle \leq h_K(y) \quad \forall x \in K$ δίνει ότι

$$\left\langle x, \frac{y}{h_K(y)} \right\rangle \leq 1 \quad \forall x \in K \quad \text{και άρα } \frac{y}{h_K(y)} \in K^\circ = 1 \cdot K^\circ$$

$$\text{Άρα } g_{K^\circ}\left(\frac{y}{h_K(y)}\right) \leq 1 \xrightarrow[\text{ens } g_{K^\circ}]{\text{θετική ομοιογένεια}} \frac{1}{h_K(y)} g_{K^\circ}(y) \leq 1$$

Δείξαμε ότι $g_{K^\circ}(y) = h_K(y)$ όταν $h_K(y) \neq 0$

Μένει να δούμε την περίπτωση όταν $h_K(y) = 0$

Εστω ότι $h_K(y) = 0$, τότε $\langle x, y \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K$
Για $t > 0$, $\langle x, ty \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K$, άρα $ty \in K^\circ \quad \forall t > 0$
Έπεται ότι $g_{K^\circ}(y) = 0$.
Άρα πάλι $h_K(y) = g_{K^\circ}(y)$

Απόδειξη (β)

Εστω K κυρτό, κλειστό, με $0 \in \text{int}(K)$.
Τότε K° κυρτό, κλειστό και επειδή $0 \in \text{int}(K)$ έχουμε
ότι K° είναι φραγμένο. Άρα K° είναι συμπαγές.
Άρα η h_{K° είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.

Επίσης $0 \in K^\circ$ (το οποίο ισχύει πάντα)

Απο (α) ισχύει ότι $h_{K^\circ} = g_{K^{\circ\circ}}$

Απο το διπολικό Θεώρημα: $K^{\circ\circ} = \overline{\text{conv}(K \cup \{0\})} = K$,
επειδή $0 \in K$, K κλειστό και κυρτό.

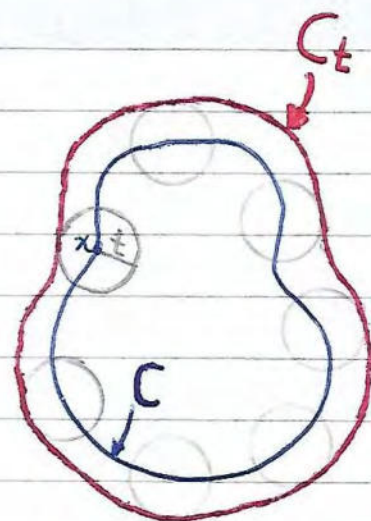
ΑΠΟΣΤΑΣΗ HAUSDORFF

Έστω $C \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό, μη-κενό

Ορίσουμε για $t \geq 0$

$$\begin{aligned} C_t &= C + tB_2(0,1) \\ &= C + B_2(0,t) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, C) \leq t\} \end{aligned}$$

όπου $\text{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|_2$



Αν $t=0$, $C_0 = C$

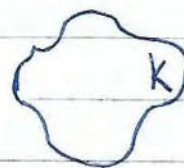
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1 Αν C κυρτό, τότε C_t είναι κυρτό $\forall t \geq 0$, ως άθροισμα Minkowski των κυρτών συνόλων C και $B_2(0,t)$

2 Το σύνολο $I_{K,C} = \{t \in [0, +\infty) : K \subseteq C_t \text{ και } C \subseteq K_t\}$ είναι μη κενό για $K, C \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενά και συμπαγή, και είναι κάτω φραγμένο.

ΟΡΙΣΜΟΣ [ΑΠΟΣΤΑΣΗ HAUSDORFF]

Για $K, C \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενά και συμπαγή, ορίσουμε την απόσταση Hausdorff



$$\delta(C, K) = \inf I_{K,C} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\delta(C, K) = \inf \{t \in [0, +\infty) : K \subseteq C_t \text{ και } C \subseteq K_t\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω $\emptyset \neq K, C \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγή σύνολα και

$$I_{K,C} = \{t \in [0, +\infty) : K \subseteq C_t \text{ και } C \subseteq K_t\}.$$

Αν $t \in I_{K,C}$ και $s > t$, τότε $s \in I_{K,C}$.

Άρα $I_{K,C}$ είναι διάστημα με $I_{K,C} = (\delta(K,C), +\infty)$ ή
 $I_{K,C} = [\delta(K,C), +\infty)$

Έστω $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $I_{K,C}$ π.ω. $t_n \downarrow \delta(K,C) = \inf I_{K,C}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι: $K \subseteq C_{t_n}$ και $C \subseteq K_{t_n}$

$$\text{Άρα } K \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n} \text{ και } C \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_n}$$

$$\text{Ισχυρισμός: } \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n} = C_{\delta(K,C)} \text{ και } \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_n} = K_{\delta(K,C)}$$

Απο ισχυρισμό, προκύπτει ότι $\delta(K,C) \in I_{K,C}$

[Αποδείξτε ισχυρισμό]

► $C_{\delta(K,C)} \subseteq C_{t_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, επειδή $\delta(K,C) \leq t_n$. Άρα
 $C_{\delta(K,C)} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n}$

► Έστω τώρα, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n}$. Και έστω $x \notin C_{\delta(K,C)}$.
Τότε $\text{dist}(x, C) > \delta(K,C)$. Επειδή $t_n \downarrow \delta(K,C)$, υπάρχει
 $n_0 \in \mathbb{N}$ π.ω. $\text{dist}(x, C) > t_n \quad \forall n \geq n_0$.

Έπεται ότι $x \notin C_{t_n}$, $\forall n \geq n_0$. Άρα $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n}$.

Οπότε έχουμε άτοπο.

Εναλλακτικά, δείξαμε ότι $\mathbb{R}^d \setminus C_{\delta(K,C)} \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n}$

Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n} \subseteq C_{\delta(K,C)}$

Άρα δείξαμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n} = C_{\delta(K,C)}$ και όμοια $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_n} = K_{\delta(K,C)}$

Συμβολισμός: $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d) = \{C \subseteq \mathbb{R}^d : C \neq \emptyset, \text{συμπαγές}\}$

Γενικότερα για $X \subseteq \mathbb{R}^d, X \neq \emptyset$
 $\mathcal{C}(X) = \{C \subseteq X : C \neq \emptyset, \text{συμπαγές}\}$

Λήμμα Έστω $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό
Τότε $C_{t+s} = (C_t)_s = (C_s)_t$ για $t, s \geq 0$

απόδειξη $\rightarrow$ με $t+s > 0$

Έστω $t, s \geq 0$. Έστω $x \in C_{t+s}$. Τότε $\exists y \in C$ π.ω.
 $\|x - y\|_2 \leq t + s$.

Ορίσουμε $z = \frac{t}{t+s}x + \frac{s}{t+s}y$

Τότε $\|z - y\|_2 = \frac{t}{t+s} \|x - y\| \leq t$. Άρα $z \in C_t$

Επίσης $\|z - x\|_2 = \frac{s}{t+s} \|x - y\| \leq s$. Άρα $x \in (C_t)_s$

Άρα δείξαμε ότι $C_{t+s} \subseteq (C_t)_s$

Αντίστροφα, $x \in (C_t)_s$. Τότε υπάρχει $y \in C_t$ π.ω.
 $\|x - y\| \leq s$.

Επίσης, $\exists z \in C$ π.ω. $\|y - z\|_2 \leq t$

Τότε από την τριγωνική ανισότητα $\|x - z\|_2 \leq t + s$

και άρα $x \in C_{t+s}$ ■

(*) Παρατήρηση: Για $C \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό, $C \neq \emptyset$, το C_t
είναι επίσης κλειστό. [Το χρησιμοποιήσαμε στην αποδ. του Λήμματος]

Πράγματι, $C_t = C + B_2(0, t)$ είναι άθροισμα Minkowski
κλειστού με συμπαγές

ΠΡΟΤΑΣΗ Η δ είναι μετρική στο $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$

Έστω $K, C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$

$\delta(K, C) \geq 0$ εξ' ορισμού και $\delta(C, C) = 0$

Έστω $\delta(K, C) = 0$, τότε $K \subseteq C_t$ και $C \subseteq K_t \quad \forall t \geq 0$

Για $t=0$, $K \subseteq C$ και $C \subseteq K$

Από ορισμό $\delta(K, C) = \delta(C, K)$ (είναι συμμετρική)

Έστω τώρα $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$

Έστω $t = \delta(K, C)$ και $s = \delta(K, F)$

Τότε $K \subseteq C_t$ και $C \subseteq K_t$

$K \subseteq F_s$ και $F \subseteq K_s$

Τότε $C \subseteq K_t \subseteq (F_s)_t = F_{s+t}$

$F \subseteq K_s \subseteq (C_t)_s = C_{t+s}$

Άρα $\delta(F, C) \leq s+t = \delta(K, C) + \delta(K, F)$

Συνεπώς, η δ είναι μετρική στον χώρο $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$

ΛΗΜΜΑ

Έστω $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό.

Έστω $\varepsilon_n > 0$ τ.ω. $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\varepsilon_n} = C$

απόδειξη

$C \subseteq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, άρα $C \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\varepsilon_n}$

Έστω τώρα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\varepsilon_n}$

$x \in C_{\varepsilon_n} \implies \text{dist}(x, C) \leq \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\text{dist}(x, C) = 0$ και επειδή C κλειστό πρέπει $x \in C$.
Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq C$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό, τότε $\mathcal{C}(X)$ κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ ως προς την μετρική Hausdorff δ .

απόδειξη

Έστω $(K^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία συνόλων στο $\mathcal{C}(X)$ τ.ω. $\delta(K^{(n)}, K) \rightarrow 0$ για κάποιο $K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $K \subseteq X$.

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\delta(K^{(n)}, K) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.
Τότε, $K \subseteq (K^{(n)})_{\varepsilon}$ και $K^{(n)} \subseteq K_{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0$.

Επειδή $K^{(n)} \subseteq X$ έπεται ότι $K \subseteq (K^{(n)})_{\varepsilon} \subseteq X_{\varepsilon}$ για κάποιο $n \geq n_0$.

Δηλαδή για $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, $K \subseteq X_{\frac{1}{m}}$.
Άρα $K \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} X_{\frac{1}{m}} = X$.

Συμβολισμός $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d) = \{K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) : K \text{ κυρτό}\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Το $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ είναι κλειστό σύνολο του μετρικού χώρου $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \delta)$.

απόδειξη

Έστω $(K^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ τ.ω. $\delta(K^{(n)}, K) \rightarrow 0$
για κάποιο $K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.

Πρέπει να δείξουμε ότι, K κυρτό.

Έστω $x, y \in K$ και $\lambda \in [0, 1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$
υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\delta(K^{(n)}, K) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$, δηλ.
 $K^{(n)} \subseteq K_\varepsilon$

$$K \subseteq (K^{(n)})_\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$K^{(n)}$ κυρτό $\implies (K^{(n)})_\varepsilon$ κυρτό.

$$\text{Άρα } \lambda x + (1-\lambda)y \in (K^{(n)})_\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{Άρα } \lambda x + (1-\lambda)y \in (K^{(n)})_\varepsilon \subseteq (K_\varepsilon)_\varepsilon = K_{2\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0$$

Αυτό για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα
 $\lambda x + (1-\lambda)y \in K_{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$\text{Άρα } \lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_{\frac{1}{m}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Λήμμα}}}{=} K$$

ΘΕΩΡΗΜΑ [ΕΠΙΛΟΓΗΣ BLASCHKE]

ΘΕΩΡΗΜΑ

- (1) Για $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές, το $\mathcal{K}(X)$ είναι συμπαγές
στο μ.χ. $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \delta)$
- (2) $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d), \delta)$ είναι πλήρης μ.χ.

Το Θεώρημα ισχύει και για τα $\mathcal{C}(X)$ και $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$
Δηλαδή για X συμπαγή το $\mathcal{C}(X)$ είναι συμπαγές
στον μ.χ. $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \delta)$ και ο μ.χ. $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \delta)$ είναι
πλήρης.

Γενικότερα, αν X πλήρης μ.χ., τότε $(\mathcal{C}(X), \delta)$ είναι πλήρης μ.χ.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για κάθε $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολύτοπο $P = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_n\})$ τ.ω. $P \subseteq K \subseteq P_\varepsilon$

Ειδικότερα, $\delta(P, K) \leq \varepsilon$.

απόδειξη

Έστω $\mathcal{U} = \{U_2(x, \varepsilon) : x \in K\}$

Το $\mathcal{U}$ είναι ανοικτό κάλυμα του K . Απο συμπαγεία, υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$ τ.ω. $K \subseteq U_2(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup U_2(x_n, \varepsilon)$

Τότε $P = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_n\}) \subseteq K$ από κυρτότητα του K

Επίσης, αν $x \in K$, τότε υπάρχει $i \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω. $x \in U_2(x_i, \varepsilon)$. Άρα $x \in P_\varepsilon$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Τα πολύτοπα είναι πυκνά στον μ.χ. $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d), \delta)$

Υπενθύμιση: Αν K κυρτό σώμα, συμμετρικό, τότε g_K είναι νόρμα.
 $K = \{x \in \mathbb{R}^d : g_K(x) \leq 1\}$, δηλαδή για συμμετρικό κυρτό σώμα, το K είναι η μοναδιαία μπάλα της νόρμας g_K

Ορισμός (υπενθύμιση)

K κλειστό, κυρτό, $0 \in \text{int}(K)$ $g_K = \inf\{t > 0 : x \in tK\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$ θετικά ομογενής και κυρτή συνάρτηση.
 Τότε, υπάρχει μοναδικό κυρτό, κλειστό $K \subseteq \mathbb{R}^d$ με $0 \in \text{int}(K)$
 τέτοιο ώστε $g_K = g$.

αποδείξη

Ορίζουμε $K = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \leq 1\}$

Η g είναι συνεχής, διότι είναι ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}^d$ που είναι ανοικτό και επιπλέον είναι κυρτή.

Αρα $K = g^{-1}((-\infty, 1])$, είναι κλειστό σύνολο

Το K είναι επίσης κυρτό. Πράγματι, έστω $x, y \in K$ και $\lambda \in [0, 1]$, τότε :

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$$

Αρα, $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

Απο την συνέχεια της g , και θετική ομογένεια, για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}^d$
 $t g(x) = g(tx)$ για $t > 0$, και παίρνοντας όριο
 καθώς $t \downarrow 0$ προκύπτει : $0 = g(0)$.

Επειδή λοιπόν η g είναι συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω.
 $|g(x) - g(0)| = |g(x)| < 1 \quad \forall x \in U_2(0, \delta)$

Επομένως $U_2(0, \delta) \subseteq K$, άρα τελικά $0 \in \text{int}(K)$.

Μένει να δείξουμε ότι το συναρτησοειδές Minkowski του K (ή η συνάρτηση σταθμής του K) είναι ίδιο με την συνάρτηση g .

Έστω $x \in \mathbb{R}^d$. Έστω $g(x) > 0$, τότε

$$1 = \frac{g(x)}{g(x)} = g\left(\frac{1}{g(x)} x\right) \quad \text{και άρα} \quad \frac{1}{g(x)} x \in K$$

$$\iff x \in g(x)K \implies g_K(x) \leq g(x)$$

Γνωρίζουμε ότι η g_K είναι επίσης θετικά ομογενής. Άρα, αν $g_K(x) > 0$, τότε:

$$1 = g_K\left(\frac{1}{g_K(x)} x\right) \quad \text{άρα} \quad \frac{1}{g_K(x)} x \in K \quad \text{και άρα}$$

$$g\left(\frac{1}{g_K(x)} x\right) \leq 1 \quad \iff \quad \frac{1}{g_K(x)} g(x) \leq 1$$

$\uparrow$
θετική ομογένεια της g

$$\implies g(x) \leq g_K(x)$$

Αν $g(x) = 0$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε

$$t g(x) = 0 \iff g(tx) = 0 \quad \text{για κάθε } t > 0$$

$$\text{άρα } tx \in K \quad \forall t > 0 \implies x \in t^{-1}K \quad \forall t > 0 \quad \text{ή} \quad x \in \cap_{t>0} K$$

$$\text{Επεται ότι } g_K(x) = 0. \quad (\text{ιδιότητα 2})$$

Αν $g_K(x) = 0$, τότε $tx \in K \quad \forall t > 0$, άρα

$$g(tx) \leq 1 \quad \forall t > 0, \quad \text{άρα} \quad t g(x) \leq 1 \quad \forall t > 0$$

$$\text{άρα} \quad g(x) \leq \frac{1}{t} \quad \forall t > 0 \quad \text{και αν πάρουμε όριο για}$$

$$t \rightarrow \infty, \quad \text{επεται ότι } g(x) = 0.$$

Σχέση μεταξύ Συναρτήσεως Στήριξης - Συναρτήσεως Σταθμής

ΘΕΩΡΗΜΑ

- (α) Έστω K συμπαγές, κυρτό με $0 \in K$. Τότε το K° είναι κλειστό, κυρτό και $0 \in \text{int}(K^\circ)$ και $h_K = g_{K^\circ}$
- (β) Έστω K κυρτό, κλειστό με $0 \in \text{int}(K)$. Τότε το K° είναι συμπαγές, κυρτό και $h_{K^\circ} = g_K$

Απόδειξη (α)

K° είναι κλειστό & κυρτό πάντα και $0 \in K^\circ$ πάντα.
Επειδή το K είναι συμπαγές, άρα φραγμένο, έπεται ότι $0 \in \text{int}(K^\circ)$, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $U_2(0, \delta) \subseteq K^\circ$.

Έπεται ότι g_{K° είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.

Έστω $y \in \mathbb{R}^d$ και $t > g_{K^\circ}(y)$, τότε $y \in tK^\circ$

$$\Leftrightarrow t^{-1}y \in K^\circ \Rightarrow \langle x, t^{-1}y \rangle \leq 1 \quad \forall x \in K$$

$$\text{Άρα } \langle x, y \rangle \leq t \quad \forall x \in K \quad \text{και άρα } \max_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq t$$

Παίρνοντας όριο καθώς $t \downarrow g_{K^\circ}$ παίρνουμε ότι

$$h_K(y) = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq g_{K^\circ}(y)$$

Επειδή $\{0\} \subseteq K$ έπεται ότι $h_K \geq 0$.

Έστω $y \in \mathbb{R}^d$ με $h_K(y) > 0$, τότε η ανισότητα $\langle x, y \rangle \leq h_K(y) \quad \forall x \in K$ δίνει ότι

$$\left\langle x, \frac{y}{h_K(y)} \right\rangle \leq 1 \quad \forall x \in K \quad \text{και άρα } \frac{y}{h_K(y)} \in K^\circ = 1 \cdot K^\circ$$

$$\text{Άρα } g_{K^\circ}\left(\frac{y}{h_K(y)}\right) \leq 1 \xrightarrow[\text{ens } g_{K^\circ}]{\text{θετική ομοιογένεια}} \frac{1}{h_K(y)} g_{K^\circ}(y) \leq 1$$

Δείξαμε ότι $g_{K^\circ}(y) = h_K(y)$ όταν $h_K(y) \neq 0$

Μένει να δούμε την περίπτωση όταν $h_K(y) = 0$

Εστω ότι $h_K(y) = 0$, τότε $\langle x, y \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K$
Για $t > 0$, $\langle x, ty \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K$, άρα $ty \in K^\circ \quad \forall t > 0$
Έπεται ότι $g_{K^\circ}(y) = 0$.
Άρα πάλι $h_K(y) = g_{K^\circ}(y)$

Απόδειξη (β)

Εστω K κυρτό, κλειστό, με $0 \in \text{int}(K)$.
Τότε K° κυρτό, κλειστό και επειδή $0 \in \text{int}(K)$ έχουμε
ότι K° είναι φραγμένο. Άρα K° είναι συμπαγές.
Άρα η h_{K° είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.

Επίσης $0 \in K^\circ$ (το οποίο ισχύει πάντα)

Απο (α) ισχύει ότι $h_{K^\circ} = g_{K^{\circ\circ}}$

Απο το διπολικό Θεώρημα: $K^{\circ\circ} = \overline{\text{conv}(K \cup \{0\})} = K$,
επειδή $0 \in K$, K κλειστό και κυρτό.

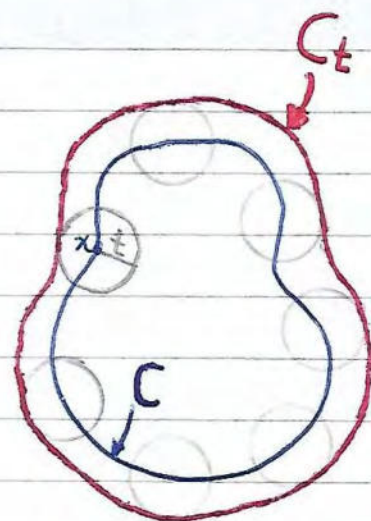
ΑΠΟΣΤΑΣΗ HAUSDORFF

Έστω $C \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό, μη-κενό

Ορίσουμε για $t \geq 0$

$$\begin{aligned} C_t &= C + tB_2(0,1) \\ &= C + B_2(0,t) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, C) \leq t\} \end{aligned}$$

όπου $\text{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|_2$



Αν $t=0$, $C_0 = C$

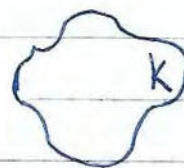
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1 Αν C κυρτό, τότε C_t είναι κυρτό $\forall t \geq 0$, ως άθροισμα Minkowski των κυρτών συνόλων C και $B_2(0,t)$

2 Το σύνολο $I_{K,C} = \{t \in [0, +\infty) : K \subseteq C_t \text{ και } C \subseteq K_t\}$ είναι μη κενό για $K, C \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενά και συμπαγή, και είναι κάτω φραγμένο.

ΟΡΙΣΜΟΣ [ΑΠΟΣΤΑΣΗ HAUSDORFF]

Για $K, C \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενά και συμπαγή, ορίσουμε την απόσταση Hausdorff



$$\delta(C, K) = \inf I_{K,C} \iff$$

$$\delta(C, K) = \inf \{t \in [0, +\infty) : K \subseteq C_t \text{ και } C \subseteq K_t\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω $\emptyset \neq K, C \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγή σύνολα και

$$I_{K,C} = \{t \in [0, +\infty) : K \subseteq C_t \text{ και } C \subseteq K_t\}.$$

Αν $t \in I_{K,C}$ και $s > t$, τότε $s \in I_{K,C}$.

Άρα $I_{K,C}$ είναι διάστημα με $I_{K,C} = (\delta(K,C), +\infty)$ ή
 $I_{K,C} = [\delta(K,C), +\infty)$

Έστω $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $I_{K,C}$ π.ω. $t_n \downarrow \delta(K,C) = \inf I_{K,C}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι: $K \subseteq C_{t_n}$ και $C \subseteq K_{t_n}$

$$\text{Άρα } K \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n} \text{ και } C \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_n}$$

$$\text{Ισχυρισμός: } \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n} = C_{\delta(K,C)} \text{ και } \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_n} = K_{\delta(K,C)}$$

Απο ισχυρισμό, προκύπτει ότι $\delta(K,C) \in I_{K,C}$

[Αποδείξτε ισχυρισμό]

► $C_{\delta(K,C)} \subseteq C_{t_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, επειδή $\delta(K,C) \leq t_n$. Άρα
 $C_{\delta(K,C)} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n}$

► Έστω τώρα, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n}$. Και έστω $x \notin C_{\delta(K,C)}$.
Τότε $\text{dist}(x, C) > \delta(K,C)$. Επειδή $t_n \downarrow \delta(K,C)$, υπάρχει
 $n_0 \in \mathbb{N}$ π.ω. $\text{dist}(x, C) > t_n \quad \forall n \geq n_0$.

Έπεται ότι $x \notin C_{t_n}$, $\forall n \geq n_0$. Άρα $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n}$.

Οπότε έχουμε άτοπο.

Εναλλακτικά, δείξαμε ότι $\mathbb{R}^d \setminus C_{\delta(K,C)} \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n}$

Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n} \subseteq C_{\delta(K,C)}$

Άρα δείξαμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{t_n} = C_{\delta(K,C)}$ και όμοια $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_n} = K_{\delta(K,C)}$

Συμβολισμός: $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d) = \{C \subseteq \mathbb{R}^d : C \neq \emptyset, \text{συμπαγές}\}$

Γενικότερα για $X \subseteq \mathbb{R}^d, X \neq \emptyset$
 $\mathcal{C}(X) = \{C \subseteq X : C \neq \emptyset, \text{συμπαγές}\}$

Λήμμα Έστω $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό
Τότε $C_{t+s} = (C_t)_s = (C_s)_t$ για $t, s \geq 0$

απόδειξη $\rightarrow$ με $t+s > 0$

Έστω $t, s \geq 0$. Έστω $x \in C_{t+s}$. Τότε $\exists y \in C$ π.ω.
 $\|x-y\|_2 \leq t+s$.

Ορίζουμε $z = \frac{t}{t+s}x + \frac{s}{t+s}y$

Τότε $\|z-y\|_2 = \frac{t}{t+s}\|x-y\| \leq t$. Άρα $z \in C_t$

Επίσης $\|z-x\|_2 = \frac{s}{t+s}\|x-y\| \leq s$. Άρα $x \in (C_t)_s$

Άρα δείξαμε ότι $C_{t+s} \subseteq (C_t)_s$

Αντίστροφα, $x \in (C_t)_s$. Τότε υπάρχει $y \in C_t$ π.ω.
 $\|x-y\| \leq s$.

Επίσης, $\exists z \in C$ π.ω. $\|y-z\|_2 \leq t$

Τότε από την τριγωνική ανισότητα $\|x-z\|_2 \leq t+s$

και άρα $x \in C_{t+s}$ ■

*) Παρατήρηση: Για $C \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό, $C \neq \emptyset$, το C_t
είναι επίσης κλειστό. [Το χρησιμοποιήσαμε στην αποδ. του Λήμματος]

Πράγματι, $C_t = C + B_2(0, t)$ είναι άθροισμα Minkowski
κλειστού με συμπαγές

ΠΡΟΤΑΣΗ Η δ είναι μετρική στο $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$

Έστω $K, C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$

$\delta(K, C) \geq 0$ εξ' ορισμού και $\delta(C, C) = 0$

Έστω $\delta(K, C) = 0$, τότε $K \subseteq C_t$ και $C \subseteq K_t \quad \forall t \geq 0$

Για $t=0$, $K \subseteq C$ και $C \subseteq K$

Από ορισμό $\delta(K, C) = \delta(C, K)$ (είναι συμμετρική)

Έστω τώρα $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$

Έστω $t = \delta(K, C)$ και $s = \delta(K, F)$

Τότε $K \subseteq C_t$ και $C \subseteq K_t$

$K \subseteq F_s$ και $F \subseteq K_s$

Τότε $C \subseteq K_t \subseteq (F_s)_t = F_{s+t}$

$F \subseteq K_s \subseteq (C_t)_s = C_{t+s}$

Άρα $\delta(F, C) \leq s+t = \delta(K, C) + \delta(F, K)$

Συνεπώς, η δ είναι μετρική στον χώρο $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$

ΛΗΜΜΑ

Έστω $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό:

Έστω $\varepsilon_n > 0$ τ.ω. $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\varepsilon_n} = C$

απόδειξη

$C \subseteq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, άρα $C \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\varepsilon_n}$

Έστω τώρα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\varepsilon_n}$

$x \in C_{\varepsilon_n} \implies \text{dist}(x, C) \leq \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\text{dist}(x, C) = 0$ και επειδή C κλειστό πρέπει $x \in C$.
Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq C$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^d$ κλειστό, τότε $\mathcal{C}(X)$ κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ ως προς την μετρική Hausdorff δ .

απόδειξη

Έστω $(K^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία συνόλων στο $\mathcal{C}(X)$ τ.ω. $\delta(K^{(n)}, K) \rightarrow 0$ για κάποιο $K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $K \subseteq X$.

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\delta(K^{(n)}, K) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.
Τότε, $K \subseteq (K^{(n)})_{\varepsilon}$ και
 $K^{(n)} \subseteq K_{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0$

Επειδή $K^{(n)} \subseteq X$ έπεται ότι $K \subseteq (K^{(n)})_{\varepsilon} \subseteq X_{\varepsilon}$ για κάποιο $n \geq n_0$.

Δηλαδή για $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, $K \subseteq X_{\frac{1}{m}}$.
Άρα $K \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} X_{\frac{1}{m}} = X$.

Συμβολισμός $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d) = \{K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) : K \text{ κυρτό}\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Το $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ είναι κλειστό σύνολο του μετρικού χώρου $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \delta)$

απόδειξη

Έστω $(K^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ τ.ω. $\delta(K^{(n)}, K) \rightarrow 0$ για κάποιο $K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.

Πρέπει να δείξουμε ότι, K κυρτό.

Έστω $x, y \in K$ και $\lambda \in [0, 1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\delta(K^{(n)}, K) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$, δηλ.
 $K^{(n)} \subseteq K_\varepsilon$

$$K \subseteq (K^{(n)})_\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$K^{(n)}$ κυρτό $\implies (K^{(n)})_\varepsilon$ κυρτό.

$$\text{Άρα } \lambda x + (1-\lambda)y \in (K^{(n)})_\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{Άρα } \lambda x + (1-\lambda)y \in (K^{(n)})_\varepsilon \subseteq (K_\varepsilon)_\varepsilon = K_{2\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0$$

Αυτό για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα
 $\lambda x + (1-\lambda)y \in K_{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$\text{Άρα } \lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_{\frac{1}{m}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Λήμμα}}}{=} K$$

ΘΕΩΡΗΜΑ [ΕΠΙΛΟΓΗΣ BLASCHKE]

ΘΕΩΡΗΜΑ

- (1) Για $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές, το $\mathcal{K}(X)$ είναι συμπαγές στο μ.χ. $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \delta)$
- (2) $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d), \delta)$ είναι πλήρης μ.χ.

Το Θεώρημα ισχύει και για τα $\mathcal{C}(X)$ και $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$
Δηλαδή για X συμπαγή το $\mathcal{C}(X)$ είναι συμπαγές στον μ.χ. $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \delta)$ και ο μ.χ. $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \delta)$ είναι πλήρης.

Γενικότερα, αν X πλήρης $\mu\chi.$, τότε $(\mathcal{C}(X), \delta)$ είναι πλήρης $\mu\chi.$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για κάθε $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολύτοπο $P = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_n\})$ τ.ω. $P \subseteq K \subseteq P_\varepsilon$

Ειδικότερα, $\delta(P, K) \leq \varepsilon$.

απόδειξη

Έστω $\mathcal{U} = \{U_2(x, \varepsilon) : x \in K\}$

Το $\mathcal{U}$ είναι ανοικτό κάλυμα του K . Απο συμπαγεία, υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$ τ.ω. $K \subseteq U_2(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup U_2(x_n, \varepsilon)$

Τότε $P = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_n\}) \subseteq K$ από κυρτότητα του K

Επίσης, αν $x \in K$, τότε υπάρχει $i \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω. $x \in U_2(x_i, \varepsilon)$. Άρα $x \in P_\varepsilon$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Τα πολύτοπα είναι πυκνά στον $\mu\chi.$ $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d), \delta)$