

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. (α) Βρείτε τις $f_x(x, y)$ και $f_y(x, y)$ της συνάρτησης $f(x, y) = 5x^2y^3 + \sin(x^2y) + e^{xy}$.

(β) Ομοίως για την συνάρτηση $g(x, y) = x^y$, $x > 0$ και $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες;

Λύση. (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 10xy^3 + 2xy \cos(x^2y) + ye^{xy}$ και $f_y(x, y) = 15x^2y^2 + x^2 \cos(x^2y) + xe^{xy}$.

(β) Παρατηρούμε ότι $g(x, y) = e^{y \ln x}$ οπότε $g_x(x, y) = e^{y \ln x} \cdot \frac{y}{x} = x^y \cdot \frac{y}{x} = x^{y-1}$ και $g_y(x, y) = e^{y \ln x} \cdot \ln x = \ln x \cdot x^y$.

(γ) Οι f, g είναι παραγωγίσιμες γιατί έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

Άσκηση 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = c$ για όλα τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c = 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = u_1^2$. Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

Λύση. (α) Θέτοντας $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$ και $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$ παίρνουμε $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 = c(u_1 + u_2)$ και άρα

$$c(u_1 + u_2) = c$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Θέτοντας $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ έχουμε ότι $c\sqrt{2} = c$ και άρα $c = 0$.

(β) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) θα έπρεπε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 = au_1 + bu_2$ δηλαδή η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0)$ θα ήταν μια γραμμική συνάρτηση ως προς $\mathbf{u}$. Επειδή $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = u_1^2$ η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0)$ δεν είναι γραμμική συνάρτηση ως προς $\mathbf{u}$ και άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } y = x^2 \text{ και } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

δηλαδή η f παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ εκτός από τα σημεία $(x, y) \neq (0, 0)$ της παραβολής $y = x^2$, όπου λαμβάνει την τιμή 1. Δείξτε τα εξής.

(α) Το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

(β) Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = 0$.

Λύση. (α) Κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$ το όριο της f στο $(0, 0)$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

ενώ κατά μήκος του άξονα x ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

Άρα το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

(β) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ μοναδιαίο. Αν $\mathbf{u} = \pm \mathbf{e}_1 = (\pm 1, 0)$ ή $\mathbf{u} = \pm \mathbf{e}_2 = (0, \pm 1)$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $t \neq 0$, το σημείο $t\mathbf{u} = (tu_1, tu_2)$ δεν περιέχεται στην παραβολή $y = x^2$. Άρα $f(tu_1, tu_2) = 0 = f(0, 0)$ και κατά συνέπεια

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = 0$$

Έστω $\mathbf{u} = \pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{e}_2$. Παρατηρούμε ότι τότε υπάρχει ένα μοναδικό $t \neq 0$ τέτοιο ώστε το σημείο $t\mathbf{u} = (tu_1, tu_2)$ να ανήκει στην παραβολή $y = x^2$. Πράγματι, το σημείο $t\mathbf{u} = (tu_1, tu_2)$ ανήκει στην παραβολή $y = x^2$ αν και μόνο αν $tu_2 = t^2 u_1^2 \Rightarrow t = u_2 / u_1^2$. Αλλά τότε για όλα τα $|t| < |u_2| / u_1^2$ θα ισχύει πάλι ότι $f(tu_1, tu_2) = 0$, οπότε και πάλι έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

Άσκηση 4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{x^5}{x^4 + y^6}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Δείξτε με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου ότι η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ υπάρχει για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

Λύση. (α)

$$|f(x, y)| \leq \left| \frac{x^5}{x^4 + y^6} \right| \leq f(x, y) = \frac{x^4}{x^4 + y^6} \cdot |x| \leq |x|$$

(β) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^5 u_1^5}{t^4 u_1^4 + t^6 u_2^6}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 u_1^5}{t^5 u_1^4 + t^7 u_2^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^5}{u_1^4 + t^2 u_2^6} = u_1.$$

Άσκηση 5. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(β) Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x, y) = g(x, y) + c$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση. (α) Έστω $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = (f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2)) + (f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1))$$

Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $x_1 \neq x_2$ και $y_1 \neq y_2$ (η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση όπου $x_1 = x_2$ ή $y_1 = y_2$). Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για συναρτήσεις μιας μεταβλητής έχουμε ότι υπάρχει ξ_1 μεταξύ των x_1, x_2 και ξ_2 μεταξύ των y_1, y_2 τέτοια ώστε

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) = f_x(\xi_1, y_2)(x_2 - x_1) = 0 \quad \text{και} \quad f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1) = f_y(x_1, \xi_2)(x_2 - x_1) = 0$$

Άρα $f(x_2, y_2) = f(x_1, y_1)$ για κάθε ζεύγος σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ και άρα η f είναι σταθερή συνάρτηση.

(β) Έστω $h = f - g$. Τότε

$$\nabla h(x, y) = \nabla(f - g)(x, y) = \nabla f(x, y) - \nabla g(x, y) = 0$$

και άρα $h_x(x, y) = h_y(x, y) = 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Από το (α) έχουμε ότι $h = c \Rightarrow f - g = c \Rightarrow f = g + c$.

Άσκηση 6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και $f(0, 0) = 0$. Δείξτε τα εξής.

(α) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ είναι και οι δύο μηδέν.

(γ) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση. (α) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq |y|$$

Άρα $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

(γ) Απο το ερώτημα (β) έχουμε ότι $\nabla f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0)) = (0, 0)$. 'ρα αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ θα είχαμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Όμως το όριο αυτό δεν υπάρχει. Πράγματι, πλησιάζοντας το $(0, 0)$ κατά μήκος της $y = x$ είναι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=x} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

ενώ κατά μήκος του x -άξονα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$.

(α) Δείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου, ότι η f έχει στο $(0, 0)$ κατά κατεύθυνση παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(β) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση. (α) Από τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3(u_1^3 + u_1u_2^2 + u_2^3)}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}}{t} = u_1^3 + u_1u_2^2 + u_2^3$$

(β) Από το (α) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$ παίρνουμε $f_x(0, 0) = 1$. Ομοίως για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ παίρνουμε $f_y(0, 0) = 1$. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1 + u_2$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ και άρα από το (α) θα είχαμε

$$u_1^3 + u_1 u_2^2 + u_2^3 = u_1 + u_2$$

για κάθε $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, άτοπο (πχ για $u_1 = u_2 = 1/\sqrt{2}$ είναι εύκολο να δούμε ότι η παραπάνω ισότητα δεν ισχύει).

Άσκηση 8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{|x| \sin x + y^3}{|x| + |y|}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$.

(α) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Βρείτε τις $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$.

(γ) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση. (α) Για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x| |\sin x| + |y|^3}{|x| + |y|} \leq \frac{|x|}{|x| + |y|} |\sin x| + \frac{|y|}{|x| + |y|} |y|^2 \leq |\sin x| + |y|^2$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ και $\lim_{y \rightarrow 0} y^2 = 0$ από την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

και άρα η f είναι συνεχής.

(β) Από τον ορισμό των μερικών παραγώγων στο $(0, 0)$ έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} = 1$$

και

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y^3}{|y|}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{|y|} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|^2}{|y|} = \lim_{y \rightarrow 0} |y| = 0$$

(γ) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ θα έπρεπε

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Όμως, πλησιάζοντας το $(0, 0)$ κινούμενοι στην ημιευθεία $y = x$ με $x > 0$ έχουμε $f(x, y) = f(x, x) = \frac{x \sin x + x^3}{2x} = \frac{\sin x + x^2}{2}$ και άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x, x) - x}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x + x^2}{2} - x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 9. Έστω $f(x, y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x + t, y + t) = f(x_0, y_0)$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $t \in \mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι $f_x + f_y = 0$.

(β) Αν $f_x(0, 0) \neq 0$ δείξτε ότι το $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ δεν υπάρχει.

(γ) Αν η f είναι κλάσης C^2 δείξτε ότι $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = -f_{xy}(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση. (α) Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας της f έχουμε

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \quad (1)$$

και άρα θέτοντας $h = k = t$ και χρησιμοποιώντας ότι $f(x_0 + t, y_0 + t) = f(x_0, y_0)$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0 + t) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)t - f_y(x_0, y_0)t}{\sqrt{2}|t|} &= 0 \Rightarrow \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0, y_0)t + f_y(x_0, y_0)t}{|t|} &= 0 \Rightarrow f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}$$

(β) Θέτουμε $f_x(0, 0) = a \neq 0$. Τότε, από το (1) έχουμε $f_y(0, 0) = -a$ και από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας της f στο $(0, 0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - ax + ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - a \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = L$ θα είχαμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{L}{a}$$

Όμως το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ δεν υπάρχει. Πράγματι, για $y = -x$ παίρνουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=-x} \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{2}|x|}$$

το οποίο δεν υπάρχει.

(γ) Από το (1) έχουμε $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_x = -f_y$. Παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε

$$f_x = -f_y \Rightarrow f_{xx} = -f_{yx} \quad (2)$$

Ομοίως, $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_y = -f_x$ και παραγωγίζοντας ως προς y παίρνουμε,

$$f_y = -f_x \Rightarrow f_{yy} = -f_{xy} \quad (3)$$

Επειδή η f είναι C^2 , από το Θεώρημα Schwarz έχουμε $f_{xy} = f_{yx}$ και άρα από τις (2) και (3) παίρνουμε ότι $f_{xx} = f_{yy} = -f_{xy}$.

Άσκηση 10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^4}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και επιπλέον

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Άρα

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

οπότε πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Πράγματι, από την ανισότητα $a^2 + b^2 \geq 2ab \geq ab$, $a, b \geq 0$, έπεται ότι $x^2 + y^4 \geq |x|y^2$ και άρα

$$\left| \frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq |y| \quad (4)$$

Οπότε από το κριτήριο Παρεμβολής,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.