

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5, ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(x,y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$
$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, \quad f(x,y) = \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Λύση. (α) Στον x -άξονα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$ ενώ στον y -άξονα $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$. Αφού τα δύο όρια είναι διαφορετικά το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει.

(β) Στην ευθεία $y = x$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{x^2 + x^4)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1 + x^2)^3} = 0$, ενώ κατά μήκος της παραβολής $x = y^2$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \frac{y^{12}}{2y^4)^3} = \frac{1}{8}$. Τα δύο όρια είναι διαφορετικά και άρα το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{x^2 + y^4}$ δεν υπάρχει.

(γ) Στον x -άξονα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$ ενώ στην ευθεία $y = x$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$. Αφού τα δύο όρια είναι διαφορετικά το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ δεν υπάρχει.

(δ) Κατά μήκος του θετικού x -άξονα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 0$ ενώ κατά μήκος του y -άξονα, $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$. Τα δύο όρια είναι διαφορετικά το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 2. Έστω $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Αποδείξτε ότι (α) $\max |f(x,y)| = \sqrt{2}$ και (β) το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Λύση. (α) Έχουμε $f(1,1) = \sqrt{2}$. Επίσης, από ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$|f(x,y)| = \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x \cdot 1 + y \cdot 1|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

Άρα $\max f(x,y) = \sqrt{2}$.

(β) Το όριο στο $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = x$ δεν υπάρχει αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2}|x|} = \sqrt{2}$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{\sqrt{2}|x|} = -\sqrt{2}$$

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} \right) = 0$.

Λύση. Έχουμε

$$\left| x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| + \left| y \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|$$

Επειδή $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (|x| + |y|) = 0$ από τον Κανόνα Παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} \right) = 0$.

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^4) \sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

Λύση. Από τις ανισότητες $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$ και $\sqrt{a^2 + b^2} \geq |b|$ παίρνουμε ότι $x^2 + y^4 \geq 2|x|y^2$ και $\sqrt{x^2 + y^2} \geq |y|$. Άρα

$$\left| \frac{xy^4}{(x^2 + y^4) \sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|y^2}{x^2 + y^4} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq \frac{1}{2}|y|$$

Από τον Κανόνα Παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^4) \sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

Άσκηση 5. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τους a, b, c ;

Λύση. Θέτουμε $f(x, y) = \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{x^2 + y^2}$, για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Τότε κατά μήκος του x -άξονα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2}{x^2} = a = 0$$

αφού $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$. Ομοίως, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$ και άρα

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{cy^2}{y^2} = c = 0$$

Τέλος κατά μήκος της $y = x$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx^2}{2x^2} = \frac{b}{2}$$

και άρα $b = 0$. Συνεπώς $a = b = c = 0$.

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = y, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Αποδείξτε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x_0 \neq 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = 0$ και ομοίως για κάθε $y_0 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) = 0$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$.

Λύση. (α) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$.

(β) Σταθεροποιούμε ένα $x_0 \neq 0$. Η ευθεία $x = x_0$ τέμνει την $y = x$ μόνο σε ένα σημείο στο (x_0, x_0) . Άρα $\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$. Ομοίως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) = 0$ για κάθε $y_0 \neq 0$.

(γ) Από το (β) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ και ομοίως $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$.

Άσκηση 7. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του X δηλαδή η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in X, \\ 0 & \text{αν } x \notin X \end{cases}$$

Βρείτε τα σημεία συνέχειας της f .

Λύση. Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R}^n = \text{Int}(X) \cup \text{Bd}(X) \cup \text{Ext}(X)$ οπότε διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις για το $\mathbf{x}_0$.

Περίπτωση 1: $\mathbf{x}_0 \in \text{Int}(X)$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq X$. Άρα η f είναι σταθερή και ίση με 1 σε μια ανοικτή περιοχή του $\mathbf{x}_0$, οπότε $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} 1 = 1 = f(\mathbf{x}_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Περίπτωση 2: $\mathbf{x}_0 \in \text{Ext}(X)$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$. Άρα και πάλι η f είναι σταθερή και ίση με 0 σε μια ανοικτή περιοχή του $\mathbf{x}_0$, οπότε $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} 0 = 0 = f(\mathbf{x}_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Περίπτωση 3: $\mathbf{x}_0 \in \text{Bd}(X)$. Τότε σε κάθε περιοχή του $\mathbf{x}_0$ υπάρχουν σημεία που ανήκουν στο X και σημεία που δεν ανήκουν στο X . Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}_0)$. Πράγματι αν $f(\mathbf{x}_0) = 1$ τότε $\mathbf{x}_0 \in X$ και επιλέγουμε $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ με $\mathbf{x} \notin X$, αντίστοιχα αν $f(\mathbf{x}_0) = 0$. Άρα για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ με $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = 1$ και άρα η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Άσκηση 8. (α) Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$ τότε για κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει ότι $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in B$).

Λύση. Έστω $B = B_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$ μία ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$.

(α) Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Έστω λοιπόν ένα τυχαίο σημείο $\mathbf{x} \in B$. Θέτουμε

$$\delta = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \tag{1}$$

Αφού $\mathbf{x} \in B = B_r(\mathbf{x}_0)$ έχουμε ότι $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$ οπότε $\delta = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > 0$. Θα δείξουμε τώρα ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ και από τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \stackrel{(1)}{=} r$$

Συνεπώς $\mathbf{y} \in B$. Επειδή το $\mathbf{y}$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της $B_\delta(\mathbf{x})$, έπεται ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$.

(β) Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$ και $t \in (0, 1)$. Τότε $z = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in B$ διότι

$$\|z - \mathbf{x}_0\| = \|(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} - ((1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_0)\| \leq (1-t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + t\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < (1-t)r + tr = r$$

Άσκηση 9. Αποδείξτε ότι κάθε μονοσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Λύση. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Για να δείξουμε ότι το $\{\mathbf{x}\}$ είναι κλειστό πρέπει να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. Έστω $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Τότε $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και άρα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > 0$. Θέτοντας $\delta = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ έχουμε $\mathbf{x} \notin B_\delta(\mathbf{y})$ και άρα $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Άρα για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$, δηλαδή το $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό.

Άσκηση 10. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγής (δηλαδή κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Λύση. Έστω $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$ μια κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ και έστω $C = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ το συμπλήρωμά της στον $\mathbb{R}^n$. Πρέπει να δείξουμε ότι το C είναι ανοικτό. Έστω $\mathbf{x} \in C$. Τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > r$ και άρα

$$\delta = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - r > 0 \quad (2)$$

Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq C$. Πράγματι έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε από τριγωνική ανισότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$$

και συνεπώς

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \delta \stackrel{(2)}{=} r.$$

Επίσης, αν $M = r + \|\mathbf{x}_0\|$ τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ έχουμε ότι

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0\| \leq r + \|\mathbf{x}_0\| = M$$

και άρα το $\overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ είναι φραγμένο.