

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

Άσκηση 1. (α) Βρείτε τις $f_x(x, y)$ και $f_y(x, y)$ της συνάρτησης $f(x, y) = 5x^2y^3 + \sin(x^2y) + e^{xy}$.

(β) Ομοίως για την συνάρτηση $g(x, y) = x^y$, $x > 0$ και $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες;

Άσκηση 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = c$ για όλα τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c = 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = u_1^2$. Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } y = x^2 \text{ και } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

δηλαδή η f παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ εκτός από τα σημεία $(x, y) \neq (0, 0)$ της παραβολής $y = x^2$, όπου λαμβάνει την τιμή 1. Δείξτε τα εξής.

(α) Το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

(β) Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = 0$.

Άσκηση 4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{x^5}{x^4 + y^6}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Δείξτε με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου ότι η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ υπάρχει για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 5. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(β) Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x, y) = g(x, y) + c$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Άσκηση 6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και $f(0, 0) = 0$. Δείξτε τα εξής.

(α) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ είναι και οι δύο μηδέν.

(γ) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \frac{x^3 + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(α) Δείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου, ότι η f έχει στο $(0,0)$ κατά κατεύθυνση παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(β) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Άσκηση 8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \frac{|x| \sin x + y^3}{|x| + |y|}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(α) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β) Βρείτε τις $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$.

(γ) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Άσκηση 9. Έστω $f(x,y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x+t, y+t) = f(x_0, y_0)$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $t \in \mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι $f_x + f_y = 0$.

(β) Αν $f_x(0,0) \neq 0$ δείξτε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ δεν υπάρχει.

(γ) Αν η f είναι κλάσης C^2 δείξτε ότι $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = -f_{xy}(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Άσκηση 10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2 + y^4}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.