

**ΣΕΜΦΕ**  
**Μαθηματική Ανάλυση II**  
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5**

**Άσκηση 1.** Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(x,y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$
$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, \quad f(x,y) = \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}.$$

**Άσκηση 2.** Έστω  $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$  για κάθε  $(x,y) \neq (0,0)$ . Αποδείξτε ότι (α)  $\max |f(x,y)| = \sqrt{2}$  και (β) το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  δεν υπάρχει.

**Άσκηση 3.** Αποδείξτε ότι  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} \right) = 0$ .

**Άσκηση 4.** Αποδείξτε ότι  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^4) \sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ .

**Άσκηση 5.** Έστω  $a, b, c \in \mathbb{R}$  τέτοιοι ώστε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τους  $a, b, c$ ;

**Άσκηση 6.** Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = y, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Αποδείξτε ότι το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  δεν υπάρχει.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε  $x_0 \neq 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = 0$  και ομοίως για κάθε  $y_0 \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) = 0$ .

(γ) Αποδείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$ .

**Άσκηση 7.** Έστω  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  και έστω  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  η χαρακτηριστική συνάρτηση του  $X$  δηλαδή η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in X, \\ 0 & \text{αν } x \notin X \end{cases}$$

Βρείτε τα σημεία συνέχειας της  $f$ .

**Άσκηση 8.** (α) Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτή μπάλα του  $\mathbb{R}^n$  είναι ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ .

(β) Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτή μπάλα του  $\mathbb{R}^n$  είναι κυρτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^d$  (δηλαδή αν  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$  τότε για κάθε  $t \in (0,1)$  ισχύει ότι  $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in B$ ).

**Άσκηση 9.** Αποδείξτε ότι κάθε μονοσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ .

**Άσκηση 10.** Αποδείξτε ότι κάθε κλειστή μπάλα του  $\mathbb{R}^n$  είναι συμπαγές (δηλαδή κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ .