

Κυρτή Ανάλυση (2024–25)

Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Ημερομηνία παράδοσης: 13 Απριλίου 2025)

1. Έστω C_1, C_2 μη κενά, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι

$$\text{ri}(C_1 + C_2) = \text{ri}(C_1) + \text{ri}(C_2).$$

2. Έστω C_1, C_2 κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) \neq \emptyset$. Αποδείξτε ότι

$$\text{ri}(C_1 \cap C_2) = \text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2).$$

Ισχύει το ίδιο για τυχόντα μη κενά κυρτά $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$;

3. Έστω $\{C_i : i \in I\}$ οικογένεια κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με $\bigcap_{i \in I} \text{ri}(C_i) \neq \emptyset$. Αποδείξτε ότι

$$\overline{\bigcap_{i \in I} C_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}.$$

4. Έστω $S = \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_n\})$ ένα n -simplex στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $y \in \text{int}(S)$. Αποδείξτε ότι τα

$$S_i = \text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n\}), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

είναι n -simplices, ανά δύο έχουν ξένα εσωτερικά, και

$$S = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_n.$$

5. Έστω C μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι: αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$, τότε $x - p_C(x) = y - p_C(y)$.

Αν $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, τι συμπεραίνετε για το C ;

6. (α) Έστω C μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $y \in T$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $z \in C$,

$$(*) \quad \langle x - y, z - y \rangle \leq 0.$$

Αποδείξτε ότι $y = p_C(x)$ (Σημ: δεν θα χρειαστείτε την υπόθεση ότι το C είναι κλειστό και κυρτό – είναι όμως γνωστό από τη θεωρία ότι με αυτές όμως τις υποθέσεις ισχύει και το αντίστροφο: υπάρχει το $p_C(x)$ και ικανοποιεί την $(*)$).

(β) Έστω $\{C_k\}$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών, κλειστών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \neq \emptyset$. Αποδείξτε ότι $p_{C_k}(x) \rightarrow p_C(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

7. Έστω K μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει οικογένεια $\{B(x_i, r_i) : i \in I\}$ από κλειστές μπάλες στον $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$K = \bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i).$$

8. Έστω $K_1, \dots, K_m$ μη κενά συμπαγή κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\bigcap_{i=1}^m K_i = \emptyset$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν κλειστοί ημίχωροι $H_1, \dots, H_m \subset \mathbb{R}^n$ τέτοιοι ώστε $K_i \subseteq H_i$ για $i = 1, \dots, m$ και $\bigcap_{i=1}^m H_i = \emptyset$.

9. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το κέντρο βάρους του K είναι το σημείο $y = (y_1, \dots, y_n)$ με συντεταγμένες

$$y_i = \frac{1}{|K|} \int_K \langle x, e_i \rangle dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Αποδείξτε ότι $y \in K$.

10. (α) Περιγράψτε όλα τα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που το συμπλήρωμά τους είναι επίσης κυρτό.

(β) Περιγράψτε όλα τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τα οποία δεν έχουν κανένα υπερεπίπεδο στήριξης.