

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4, ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. (α) Αν $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ θετική συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < +\infty$ δείξτε ότι τα ολοκληρώματα $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ και $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ αποκλίνουν.

(β) Αν $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ θετική συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) < +\infty$ δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ συγκλίνει.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε το Οριακό κριτήριο σύγκρισης με τις συναρτήσεις $\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

(α) Έχουμε ότι τα ολοκληρώματα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ αποκλίνουν. Επιπλέον $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < +\infty$ και ομοίως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < +\infty$. Άρα τα ολοκληρώματα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ αποκλίνουν.

(β) Έχουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ συγκλίνει και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) < +\infty$. Άρα το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ συγκλίνει.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = +\infty$.

Λύση. Έχουμε

$$\int_0^b \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{b^2+1} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln(b^2 + 1)$$

και άρα $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(b^2 + 1) = +\infty$.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι $\int_0^{\pi/2} \tan x dx = +\infty$.

Λύση. Έχουμε

$$\int_0^{\pi/2} \tan x dx = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^b \tan x dx = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin x}{\cos x} dx = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_1^{\cos b} \frac{du}{u} = - \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\cos b) = - \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = +\infty$$

Άσκηση 4. Δείξτε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx$ συγκλίνει ενώ το $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx$ αποκλίνει.

Λύση. Έχουμε $0 < x < \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \geq 1$ και άρα

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$$

ενώ $\sqrt{x^2 + 1} \leq 2$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και άρα

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$$

Άσκηση 5. Δείξτε ότι για κάθε $p, q \in (0, 1)$ το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^p(1-x)^q} dx$ συγκλίνει.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε το Οριακό κριτήριο σύγκρισης με τις συναρτήσεις $\frac{1}{x^p}$ και $\frac{1}{(1-x)^q}$. Έχουμε ότι τα ολοκλήρωμα $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^p} dx$ και $\int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-x)^q} dx$ συγκλίνουν. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \frac{1}{x^p(1-x)^q} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-x)^q} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^q \frac{1}{x^p(1-x)^q} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^p} = 1$$

τα ολοκλήρωμα $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^p(1-x)^q} dx$ και $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^p(1-x)^q} dx$ συγκλίνουν. Άρα και το

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p(1-x)^q} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^p(1-x)^q} dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{x^p(1-x)^q} dx$$

συγκλίνει.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι $\int_0^1 \frac{1}{x \ln x} dx = -\infty$.

Λύση. Θέτοντας $u = \ln x$ έχουμε $du = \frac{1}{x} dx$ και

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^-} \int_c^{1/2} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^-} \int_{\ln c}^{\ln(1/2)} \frac{du}{u} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \ln c - \ln(1/2) = -\infty$$

Ομοίως δείνουμε ότι $\int_{1/2}^0 \frac{1}{x \ln x} dx = -\infty$. Άρα

$$\int_0^1 \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{1/2}^0 \frac{1}{x \ln x} dx + \int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln x} dx = -\infty$$

Άσκηση 7. (α) Αν το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει δείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$.

(β) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ αποκλίνει αλλά το όριο $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ υπάρχει.

Λύση. (α) Αν το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει τότε τα ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 f(x) dx \text{ και } \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) dx$$

συγκλίνουν και

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 f(x) dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx \right) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx \end{aligned}$$

(β) Αν $f(x) = x$ τότε $\int_0^{+\infty} x \, dx = +\infty$, $\int_{-\infty}^0 x \, dx = -\infty$ και άρα το $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$ δεν ορίζεται. Όμως $\int_{-R}^R x \, dx = 0$ για κάθε $R > 0$ και άρα $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) \, dx = 0$.

Άσκηση 8. Αν το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ συγκλίνει και το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ υπάρχει δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Ισχύει το ίδιο αν δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

Λύση. Έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\ell \in \mathbb{R}$ και $\ell > 0$. Τότε υπάρχει $a > 0$ με $f(x) > \ell/2$ για κάθε $x \geq a$. Αλλά τότε $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) \, dx \geq \frac{\ell}{2} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c dx = +\infty$, άτοπο. Ομοίως εργαζόμαστε αν $\ell < 0$ ή $\ell = \pm\infty$. Δεν ισχύει το ίδιο αν δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Π.χ. το $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) \, dx$ συγκλίνει αλλά το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x^2)$ δεν υπάρχει (δείτε σχετική άσκηση στο Φυλ. 3).

Άσκηση 9. Αν η $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα και το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ συγκλίνει δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.

Λύση. Έχουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$. Πράγματι αν για κάποιο $x_0 \geq 0$ είχαμε $f(x_0) < 0$ τότε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \geq x_0$ και άρα $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c f(x) \, dx = \int_0^{x_0} f(x) \, dx + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^c f(x) \, dx = -\infty$, άτοπο. Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$0 \leq xf(x) \leq \int_x^{2x} f(t) \, dt \quad (1)$$

διότι

$$f(x) = \min\{f(t) : t \in [x, 2x]\} \Rightarrow xf(x) = \int_x^{2x} f(x) \, dt \leq \int_x^{2x} f(t) \, dt$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{2x} f(t) \, dt - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx - \int_0^{+\infty} f(x) \, dx = 0$$

από την (1) και το Κριτήριο Παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.