

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

Άσκηση 1. (α) Αν $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ θετική συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < +\infty$ δείξτε ότι τα ολοκληρώματα $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ και $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ αποκλίνουν.

(β) Αν $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ θετική συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) < +\infty$ δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ συγκλίνει.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = +\infty$.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι $\int_0^{\pi/2} \tan x dx = +\infty$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx$ συγκλίνει ενώ το $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx$ αποκλίνει.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι για κάθε $p, q \in (0, 1)$ το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^p(1-x)^q} dx$ συγκλίνει.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι $\int_0^1 \frac{1}{x \ln x} dx = -\infty$.

Άσκηση 7. (α) Αν το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει δείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$.

(β) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ αποκλίνει αλλά το όριο $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ υπάρχει.

Άσκηση 8. Αν το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει και το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ υπάρχει δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Ισχύει το ίδιο αν δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

Άσκηση 9. Αν η $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα και το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.