

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

Άσκηση 1. Έστω $f(x) = x \sin(x^2)$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $y = \sin(x^2)$ σε δυναμοσειρά να υπολογιστεί η παράγωγος $f^{(15)}(0)$.

Λύση. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, οπότε

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$f(x) = x \sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Όμως, όπως γνωρίζουμε αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ τότε $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\frac{f^{(15)}(0)}{15!} = (-1)^3 \frac{1}{(2 \cdot 3 + 1)!} \Leftrightarrow f^{(15)}(0) = -\frac{15!}{7!}.$$

Άσκηση 2. Έστω $n \geq 0$ ακέραιος και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -φορές παραγωγίσιμη με $f^{(n+1)}(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n .

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι υπάρχει $\xi = \xi(x)$ μεταξύ του x και του 0 τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \Rightarrow$$
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Άρα θέτοντας $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ για κάθε $k \in \{0, \dots, n\}$ παίρνουμε ότι $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε υπάρχει $M > 0$ με την ιδιότητα $|f^{(n)}(x)| \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \Leftrightarrow$$
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right) \Leftrightarrow$$
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$$

όπου $T_n(x)$ είναι το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το $a = 0$. Άρα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) \quad (1)$$

Για $x = 0$ έχουμε $T_n(0) = f(0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα η (1) ισχύει τετριμμένα. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi = \xi(n, x)$ μεταξύ του x και του 0 τέτοιο ώστε

$$|f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2)$$

Η (1) έπεται τώρα άμεσα από την (2) αφού όπως είναι γνωστό $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$.

Άσκηση 4. Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έχουμε $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ και άρα $f^{(n)}(x) = \frac{1}{3^n} f(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $f^{(n)}(0) = \frac{1}{3^n}$ και άρα

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{3 \cdot 1!} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{x^n}{3^n \cdot n!}$$

Άσκηση 5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f'(0) = 0$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right|$ συγκλίνει.

Λύση. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ μεταξύ των x και 0 τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot x^2 = f(0) + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot x^2$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για $x = \frac{1}{n}$ θα υπάρχει $\xi_n \in \mathbb{R}$ με

$$0 < \xi_n < \frac{1}{n}$$

τέτοιο ώστε

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + \frac{f''(\xi_n)}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Από τα παραπάνω έχουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = 0$ και

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right| = \frac{|f''(\xi_n)|}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Αφού η f'' είναι συνεχής και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = 0$, από Αρχή Μεταφοράς έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f''(\xi_n) = f''(0)$ και άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f''(\xi_n)| = |f''(0)|$$

και άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{f''(0)}{2} \in \mathbb{R}$$

Από Οριακό κριτήριο σύγκλισης και επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right|$ συγκλίνει.

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n^2+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε τις τιμές $f(0)$, $f'(0)$ και $f''(0)$.

Λύση. Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και άρα από Αρχή Μεταφοράς,

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

Ομοίως από Αρχή Μεταφοράς (δες και το (β) ερώτημα),

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2+1} - 0}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

Τέλος, από τον τύπο Taylor, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ξ μεταξύ των x και 0 τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_n \in (0, 1/n)$ με

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + \frac{f''(\xi_n)}{2} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n} + \frac{f''(\xi_n)}{2} \frac{1}{n^2} \\ &\Rightarrow f''(\xi_n) = -\frac{2n^2}{n(n^2+1)}. \end{aligned}$$

Επειδή $0 < \xi_n < 1/n$ έχουμε ότι $\xi_n \rightarrow 0$ και αφού η f'' είναι συνεχής, από Αρχή Μεταφοράς,

$$f''(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f''(\xi_n) = 0.$$

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η f και η f'' είναι φραγμένες δείξτε ότι και η f' είναι φραγμένη.

Λύση. Έστω $M_0, M_2 > 0$ τέτοια ώστε $|f(x)| \leq M_0$ και $|f''(x)| \leq M_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι για κάθε $x \neq a$ υπάρχει ξ μεταξύ των a και x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$$

Άρα για $x = a+1$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, a+1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(a+1) &= f(a) + f'(a) + \frac{f''(\xi)}{2} \Rightarrow \\ f'(a) &= f(a+1) - f(a) - \frac{f''(\xi)}{2} \Rightarrow \\ |f'(a)| &\leq |f(a+1)| + |f(a)| + \frac{|f''(\xi)|}{2} \Rightarrow \\ |f'(a)| &\leq 2M_0 + \frac{M_2}{2} \end{aligned}$$

Άρα για $M_1 = 2M_0 + \frac{M_2}{2}$ έχουμε ότι $|f'(x)| \leq M_1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ και $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$.

Λύση. Απο το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι για κάθε $x, a \in [0, 1]$ με $x \neq a$ υπάρχει ξ γνήσια μεταξύ των x, a τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - a)^2.$$

Έστω $x = 1/2$. Τότε για $a = 0$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1/2)$ με

$$f(1/2) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{f''(\xi_1)}{8}$$

Ομοίως για $a = 1$ υπάρχει $\xi_2 \in (1/2, 1)$

$$f(1/2) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = 1 + \frac{f''(\xi_2)}{8}$$

Άρα $f(1/2) = 1 + \frac{f''(\xi_1)}{8} = 1 + \frac{f''(\xi_2)}{8}$ οπότε και $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} x \cos x \, dx$ δεν υπάρχει.

Λύση. Έστω $b > 0$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, έχουμε

$$\int_0^b x \cos x \, dx = \int_0^b x(\sin x)' \, dx = x \sin x|_0^b - \int_0^b x' \sin x = b \sin b - \int_0^b \sin x \, dx = b \sin b + \cos b - 1$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} x \cos x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x \cos x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (b \sin b + \cos b - 1)$$

το οποίο δεν υπάρχει. Πράγματι αν $b_n = 2n\pi$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n \sin b_n + \cos b_n - 1) = 0$$

ενώ αν $b'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b'_n \sin b'_n + \cos b'_n - 1) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - 1 = +\infty$$

Άσκηση 10. (α) Δείξτε ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) \, dx$ και $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx$ συγκλίνουν.

(β) Αν ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ συγκλίνει ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

Λύση. (α) Επειδή $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) \, dx = \int_0^1 \cos(x^2) \, dx + \int_1^{+\infty} \cos(x^2) \, dx$ αρκεί να δειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \cos(x^2) \, dx$ συγκλίνει. Θέτοντας $u = x^2$ και $du = 2x dx = 2\sqrt{u} dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}}$ έχουμε

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \cos(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\cos u}{u^{\frac{1}{2}}} \, du$$

που ως γνωστόν συγκλίνει.

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx$ εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο.

(β) Από το (α) έχουμε ότι το $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ συγκλίνει. Όμως το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x^2)$ δεν υπάρχει (θεωρείστε τις ακολουθίες $x_n = \sqrt{2\pi n}$ και $x_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$).

Άσκηση 11. (α) Δείξτε ότι $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Δείξτε ότι $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$.

Λύση. (α) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $x = n\pi + u$, $u \in [0, \pi]$. Τότε

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n\pi + u)|}{n\pi + u} du \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin u du = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

διότι $0 < n\pi + u \leq (n+1)\pi$ και $|\sin(n\pi + u)| = \sin u \geq 0$ για κάθε $u \in [0, \pi]$ και $\int_0^{\pi} \sin u du = -\cos u \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2$.

(β) Έχουμε

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$$