

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

Άσκηση 1. Έστω $f(x) = x \sin(x^2)$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $y = \sin(x^2)$ σε δυναμοσειρά να υπολογιστεί η παράγωγος $f^{(15)}(0)$.

Άσκηση 2. Έστω $n \geq 0$ ακέραιος και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -φορές παραγωγίσιμη με $f^{(n+1)}(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n .

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε υπάρχει $M > 0$ με την ιδιότητα $|f^{(n)}(x)| \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4. Δώστε τον τύπο του πολωνύμου Taylor τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f'(0) = 0$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right|$ συγκλίνει.

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n^2 + 1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε τις τιμές $f(0)$, $f'(0)$ και $f''(0)$.

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η f και η f'' είναι φραγμένες δείξτε ότι και η f' είναι φραγμένη.

Άσκηση 8. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ και $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} x \cos x \, dx$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 10. (α) Δείξτε ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) \, dx$ και $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx$ συγκλίνουν.

(β) Αν ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ συγκλίνει ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

Άσκηση 11. (α) Δείξτε ότι $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Δείξτε ότι $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \, dx = +\infty$.