

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

Άσκηση 1. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η ακολουθία $(n^2 a_n)$ είναι άνω φραγμένη. Εξετάστε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Λύση. Έστω $M > 0$ με $n^2 a_n \leq M \Leftrightarrow a_n \leq M \cdot \frac{1}{n^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έπεται και ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$ συγκλίνει και άρα από κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 2. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\sin \frac{1}{n}\right)$.

Λύση. Έχουμε $\arctan\left(\sin \frac{1}{n}\right) > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = (\arctan x)'_{x=0} = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1$$

και ομοίως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, από οριακό κριτήριο σύγκλισης, έπεται και ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\sin \frac{1}{n}\right)$ δεν συγκλίνει.

Άσκηση 3. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Λύση. Από Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy αρκεί να εξετάσουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{\ln 2^n}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln 2}{2^n}$, η οποία συγκλίνει από το Κριτήριο ρίζας του Cauchy αφού

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n \ln 2}{2^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln 2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Άσκηση 4. Έστω $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι $R = 1$.

Λύση. Από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard η δυναμοσειρά συγκλίνει αν $|x| < R$ και αποκλίνει αν $|x| > R$. Παρατηρούμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = -1$ αφού στην περίπτωση αυτή παίρνει την μορφή της εναλλάσσουσας σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ που συγκλίνει λόγω του ότι η (a_n) είναι φθίνουσα και μηδενική (κριτήριο Leibniz). Συνεπώς, θα πρέπει $R \geq 1$ διότι Από την άλλη μεριά, η υπόθεση ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει σημαίνει ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = 1$ και άρα θα πρέπει $R \leq 1$. Συνεπώς $R = 1$.

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι για κάθε φραγμένη ακολουθία (b_n) υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f^{(n)}(0) = b_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$.

Λύση. Θεωρούμε την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, επειδή $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$ έχουμε ότι $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$ και άρα $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$. Οπότε $\sqrt[n]{\frac{|b_n|}{n!}} \rightarrow 0$ (αφού (b_n) φραγμένη) και άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ έχουμε $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{b_n}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(0) = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 6. Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x-1)^n$ συγκλίνει.

Λύση. Είναι $a_n = \frac{3^n}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}} = 3$ (αφού $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Άρα $R = 1/3$.

Αφού το κέντρο είναι $x_0 = 1$ και η ακτίνα σύγκλισης $R = 1/3$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \mathbb{R}$ με $|x-1| < 1/3 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ και αποκλίνει για $x \in \mathbb{R}$ με $|x-1| > 1/3 \Leftrightarrow x < 2/3$ ή $x > 4/3$. Για $x = 2/3$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(\frac{2}{3} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που συγκλίνει ως εναλλάσσουσα αρμονική.

Αντίστοιχα για $x = 4/3$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(\frac{4}{3} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά και αποκλίνει. Συνεπώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ και αποκλίνει για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού n με πραγματικούς συντελεστές. Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = P(a) + \frac{P'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Λύση. Σταθεροποιούμε ένα $a \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \geq 0$ θεωρούμε την εξής πρόταση $\Pi(n)$: Κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού n με πραγματικούς συντελεστές γράφεται στη μορφή

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \geq 0$ η $\Pi(n)$ ισχύει. Για $n = 0$ έχουμε $P(x) = a_0 = P(a)$ και η πρόταση ισχύει. Έστω ότι η $\Pi(n)$ ισχύει για κάποιο $n \geq 0$. Θα δείξουμε ότι αυτό συνεπάγεται ότι η $\Pi(n+1)$ ισχύει. Πράγματι, έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού $n+1$. Τότε το $P'(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n . Άρα από την επαγωγική μας υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(P')^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned} \tag{1}$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε

$$\begin{aligned}
 P(x) - P(a) &= \int_a^x P'(t) dt = \int_a^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) dt \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} \int_a^x (t-a)^k dt \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k
 \end{aligned} \tag{2}$$

και άρα

$$P(x) = P(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

και η απόδειξη του επαγωγικού βήματος ολοκληρώθηκε.

Άσκηση 8. Έστω $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$.

(i) Αποδείξτε ότι $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ για όλα τα $x \in (-1, 1)$.

(ii) Βρείτε την $f^{(2025)}(0)$.

(iii) Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots$

Λύση. (i)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

(ii) Γενικά γνωρίζουμε ότι αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

Από το (α) έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Άρα $a_n = n+1$ οπότε $f^{(n)}(0) = (n+1) \cdot n! = (n+1)! \Rightarrow f^{(2025)}(0) = 2026!$.

(iii) Από το (i) έχουμε $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \Big|_{x=1/2} = 4$.

Άσκηση 9. Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$.

(α) Εξετάστε την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία $x = \pm 2$.

(β) Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2$.

(γ) Αποδείξτε ότι $f'(x) = \frac{1}{2-x}$ για όλα τα $x \in (-2, 2)$.

(δ) Βρείτε τον τύπο της $f(x)$ για κάθε $x \in (-2, 2)$ και υπολογίστε το άθροισμα $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n}$.

Λύση. (α) Για $x = -2$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} (-1)^n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά, η οποία ως γνωστόν συγκλίνει (από το κριτήριο Leibniz).

Για $x = 2$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά η οποία αποκλίνει.

(β) Έχουμε

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n n}} = \frac{1}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$$

και άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = \frac{1}{\rho} = 2$.

(γ) Είναι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}$$

(δ) Έχουμε $(-\ln(2-x))' = \frac{1}{2-x} = f'(x)$. Άρα από το (γ), οι συναρτήσεις $f(x)$ και $-\ln(2-x)$ έχουν την ίδια παράγωγο για κάθε $x \in (-2, 2)$. Συνεπώς υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = -\ln(2-x) + c$ για κάθε $x \in (-2, 2)$. Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} 0^n = 0$ και άρα $c = \ln 2$. Οπότε

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{2-x}\right)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} = f(-1) = \ln\left(\frac{2}{2-(-1)}\right) = \ln \frac{2}{3}$.

Άσκηση 10. Δίνεται η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R και το ακριβές διάστημα σύγκλισης.

(ii) Υπολογίστε την συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-R, R)$.

Λύση. (i) Έχουμε $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Άρα $R = 1/\rho = 1$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1, 1)$ και αποκλίνει για $x < -1$ ή $x > 1$. Μένει να εξετάσουμε τα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Στο $x = -1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική η οποία συγκλίνει ενώ για $x = 1$ παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική η οποία αποκλίνει. Άρα το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1, 1)$.

(ii) Είναι $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Άρα από το ΘΘΟΛ και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \\ &= - \int_1^{1-x} \frac{1}{u} du \\ &= -[\ln u]_1^{1-x} = -\ln(1-x) = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Άσκηση 11. (α) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση $\frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-1, 1)$.

(β) Αποδείξτε ότι $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(γ) Αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Λύση. (α) Έστω $x \in (-1, 1)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \end{aligned}$$

(γ) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ συγκλίνει και για $x = 1$. Πράγματι αν θέσουμε $x = 1$ τότε παίρνουμε την σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \quad (3)$$

που είναι εναλλάσσουσα με την ακολουθία $a_n = \frac{1}{2n+1}$ φθίνουσα και μηδενική (Κριτήριο Leibniz). Άρα από το Θεώρημα Abel έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Από την άλλη μεριά λόγω συνέχειας της $\arctan x$ ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Συνεπώς αφού $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$