

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

Άσκηση 1. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η ακολουθία $(n^2 a_n)$ είναι άνω φραγμένη. Εξετάστε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 2. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\sin \frac{1}{n}\right)$.

Άσκηση 3. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Άσκηση 4. Έστω $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι $R = 1$.

Άσκηση 5. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει και η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει δείξτε ότι το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ είναι το $[-1, 1)$.

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι για κάθε φραγμένη ακολουθία (b_n) υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f^{(n)}(0) = b_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$.

Άσκηση 7. Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x-1)^n$ συγκλίνει.

Άσκηση 8. Έστω $P(x)$ πολώνυμο βαθμού n με πραγματικούς συντελεστές. Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = P(a) + \frac{P'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Άσκηση 9. Έστω $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$.

(i) Αποδείξτε ότι $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ για όλα τα $x \in (-1, 1)$.

(ii) Βρείτε την $f^{(2025)}(0)$.

(iii) Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots$.

Άσκηση 10. Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$.

(α) Εξετάστε την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία $x = \pm 2$.

(β) Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2$.

(γ) Αποδείξτε ότι $f'(x) = \frac{1}{2-x}$ για όλα τα $x \in (-2, 2)$.

(δ) Βρείτε τον τύπο της $f(x)$ για κάθε $x \in (-2, 2)$ και υπολογίστε το άθροισμα $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n}$.

Άσκηση 11. Δίνεται η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R και το ακριβές διάστημα σύγκλισης.

(ii) Υπολογίστε την συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-R, R)$.

Άσκηση 12. (α) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση $\frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-1, 1)$.

(β) Αποδείξτε ότι $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(γ) Αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Άσκηση 13. (α) Βρείτε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}$.

(β) Δείξτε ότι $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$ και άρα $\sqrt[n]{n!} > \frac{n}{e}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.