

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

Άσκηση 1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:

1. Αν $\lim a_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
2. Αν $a_n > 0$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
3. Αν $a_n > 0$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
4. Αν $a_n > 0$ και $\lim(na_n) = 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
5. Αν $a_n > 0$ και $\lim(n^2 a_n) = 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
6. Αν $a_n > 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_n = \pm 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ συγκλίνει.
7. Αν $a_n \in \mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ συγκλίνει.
8. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$ συγκλίνει.
9. Αν $a_n > 0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ συγκλίνει.
10. Αν (a_n) αύξουσα ακολουθία με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a - a_n)$ συγκλίνει.

Λύση. (1) Ψευδής, πχ. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(2) Ψευδής, η υπόθεση απλά σημαίνει ότι η (a_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών, πχ. η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(3) Αληθής, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \stackrel{a_n > 0}{\Rightarrow} a_{n+1} \geq a_n$ δηλαδή η (a_n) είναι αύξουσα. Άρα $a_n \geq a_1 > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οπότε η (a_n) δεν μπορεί να συγκλίνει στο 0. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(4) Αληθής, η υπόθεση $\lim(na_n) = 1$ γράφεται $\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1$ και άρα από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, αφού ως γνωστόν η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ αποκλίνει.

(5) Αληθής, η υπόθεση $\lim(n^2 a_n) = 1$ γράφεται $\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = 1$ και άρα από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, αφού ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = +\infty$ συγκλίνει.

(6) Αληθής, διότι όπως γνωρίζουμε αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως (δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει) τότε συγκλίνει και κανονικά. Εδώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$, όπου (ϵ_n) είναι μια ακολουθία από $+1$ ή -1 συγκλίνει απολύτως αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\epsilon_n a_n|$ ισούται με την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ η οποία συγκλίνει από υπόθεση.

(7) Ψευδής, πχ. αν $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ συγκλίνει (κριτήριο Dirichlet) αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = +\infty$.

(8) Ψευδής, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$ δεν συγκλίνει αφού η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων ταλαντώνεται ($s_{2n} = 0 \rightarrow 0$ και $s_{2n-1} = -1 \rightarrow -1$).

(9) Αληθής, από το κριτήριο Ρίζας του Cauchy: $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim a_n = 1/2 < 1$.

(10) Αληθής, αφού (a_n) αύξουσα με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η $b_n = a - a_n$ είναι φθίνουσα με $\lim b_n = 0$. Απο κριτήριο Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a - a_n)$ συγκλίνει.

Άσκηση 2. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Με κριτήρια σύγκλισης σειρών δείξτε τα εξής :

1. Αν $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$ τότε $a_n \rightarrow 0$.
2. Αν $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ τότε $a_n \rightarrow 0$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \rightarrow 0$. Άρα αρκεί ναδειχθεί ότι και στις δύο περιπτώσεις η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Για το (1) αυτό έπεται από το Κριτήριο Ρίζας και για το (2) από το Κριτήριο Λόγου.

Άσκηση 3. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{n^n}$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$(iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(v) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$(vi) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$(vii) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Λύση. (i) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο Λόγου. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!2^n}{n^n}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = 2 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\ &= 2 \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει.

(ii) Έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

(iii) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο συμπίκνωσης του Cauchy.

Πράγματι, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και άρα η δεδομένη σειρά είναι ισοδύναμη ως προς την σύγκλιση με την $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ αποκλίνει.

(iv) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγχλίνει. Πράγματι, $\frac{\frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ και επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγχλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγχλίνει.

(v) Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ συγχλίνει. Για να το δείξουμε αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε το κριτήριο συμπίκνωσης του Cauchy. Η ακολουθία $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ είναι θετική και φθίνουσα και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο. Τώρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\ln 2^n}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln 2}{2^n}$, με εφαρμογή του κριτηρίου λόγου, βλέπουμε ότι συγχλίνει.

Εναλλακτικά μπορούμε να εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ είναι θετική και φθίνουσα για $x \geq 2$ (προκύπτει με παραγωγή). Επίσης, για κάθε $a \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_2^a \frac{\ln x}{x^2} dx &= \int_2^a \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' dx \\ &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^a - \int_2^a (\ln x)' \left(-\frac{1}{x}\right) dx \\ &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^a + \int_2^a \frac{1}{x^2} dx = -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_2^a - \left[\frac{1}{x}\right]_2^a \end{aligned}$$

και άρα $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1 + \ln 2}{2}$ συγχλίνει.

(vi) Επειδή

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγχλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης ορίου λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ δεν συγχλίνει.

(vii) Έχουμε

$$\begin{aligned} s_n &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$.

Άσκηση 4. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Αν $x = 0$ η σειρά συγχλίνει (όλοι οι όροι είναι μηδέν). Σταθεροποιούμε για την συνέχεια ένα $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ και θέτουμε $a_n = \frac{n! x^n}{n^n}$. Τότε

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)! x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! x^n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n |x| = \frac{|x|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \quad (1)$$

και άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{e}$$

Συνεπώς, αν $|x| < e$ η σειρά συγκλίνει ενώ αν $|x| > e$ αποκλίνει. Μένει να εξετάσουμε την σύγκλιση όταν $x = e$ ή $x = -e$.

Αν $x = e$ η σειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, όπου $b_n = \frac{n!e^n}{n^n}$. Τότε

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n e = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

αφού $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$. Άρα η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει (αφού $s_n = b_1 + \dots + b_n \geq nb_1 \rightarrow +\infty$). Συνεπώς η σειρά δεν συγκλίνει για $x = e$.

Αν $x = -e$ η σειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!e^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ που πάλι δεν συγκλίνει. Πράγματι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ συνέκλινε θα έπρεπε $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n b_n = 0$. Αλλά τότε και $\lim_{n \rightarrow +\infty} |(-1)^n b_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, που είναι άτοπο, αφού η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα και άρα $b_n \geq b_1 = e$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$ συγκλίνει για $x \in (-e, e)$ και αποκλίνει για κάθε άλλο $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5. (α) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με θετικούς όρους και έστω ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ για κάθε $n \geq n_0$.

(α1) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(α2) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}$ αποκλίνει.

[Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\frac{a_n}{a_{n_0}} \leq \frac{b_n}{b_{n_0}}$ για κάθε $n \geq n_0$.]

Λύση. (α) Έχουμε $\frac{a_n}{a_{n_0}} \leq \frac{b_n}{b_{n_0}}$ για κάθε $n \geq n_0$, αφού

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}} = \frac{b_n}{b_{n_0}}$$

Άρα θέτοντας $C = a_{n_0}/b_{n_0}$ παίρνουμε ότι

$$a_n \leq C b_n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Τα (α1) και (α2) έπονται τώρα από το Κριτήριο Άμεσης Σύγκρισης.

(β) Θέτουμε $b_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}$. Τότε

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \geq \frac{n}{n+1}$$

Οπότε το συμπέρασμα έπεται από το (α2) για $a_n = \frac{1}{n}$.

Άσκηση 6. (Γενίκευση του κριτηρίου Συμπύκνωσης του *Cauchy*) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και έστω $(m_k)_{k=0}^\infty$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών με $m_0 = 1$. Για κάθε $n = 0, 1, \dots$ θέτουμε

$$\delta_n^+ = m_{n+1} - m_n \text{ και } \delta_n^- = m_n - m_{n-1}$$

όπου για $n = 0$, θέτουμε $\delta_0^- = m_0 = 1$.

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^- a_{m_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n}$$

(β) Αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{\delta_n^+}{\delta_n^-} \leq c$ δείξτε ότι

$$\frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n}$$

(γ) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n}$ συγκλίνει.

(δ) Έστω $k \in \mathbb{N}$ και (a_n) φθίνουσα θετική. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} k^n a_{k^n}$ συγκλίνει.

Λύση. (α) Έστω $I_n^+ = [m_n, m_{n+1}) \cap \mathbb{N}$ και $I_n^- = (m_{n-1}, m_n] \cap \mathbb{N}$. Τότε $|I_n^+| = \delta_n^+$, $|I_n^-| = \delta_n^-$ και επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα,

$$\sum_{k \in I_n^+} a_k \leq \delta_n^+ a_{m_n} \text{ και } \sum_{k \in I_n^-} a_k \geq \delta_n^- a_{m_n}$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in I_n^+} a_k \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n}$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in I_n^-} a_k \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^- a_{m_n}$$

(β) Έχουμε $\frac{1}{c} \delta_n^+ \leq \delta_n^-$ και άρα

$$\frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^- a_{m_n}$$

(γ) Προκύπτει από το (β).

(δ) Θέτουμε $m_n = k^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Τότε $\delta_n^+ = k^{n+1} - k^n = k^n(k-1)$ και το συμπέρασμα προκύπτει από το (γ) αφού

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{k^n} = (k-1) \sum_{n=0}^{\infty} k^n a_{k^n}$$

Άσκηση 7. Έστω $a_n > 0$ με $\lim a_n = 0$ και έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $0 = m_0 < m_1 < \dots$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k \right)$$

Λύση. Έστω $x \geq 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα “μπρός-πίσω” επιχείρημα για να επιλέξουμε την ακολουθία (m_n) . Για το m_1 θεωρούμε το σύνολο

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_1 + \dots + a_n > x\}$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, το N_1 δεν είναι κενό. Θέτουμε

$$m_1 = \min N_1 \quad \text{και} \quad b_0 = \sum_{k=1}^{m_1} a_k$$

Από τον ορισμό του m_1 έπεται ότι

$$b_0 - a_{m_1} \leq x < b_0$$

Προχωρούμε για να ορίσουμε τον m_2 . Θέτουμε

$$N_2 = \{n \geq m_1 + 1 : b_0 - (a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \dots + a_n) < x\}$$

Το N_2 δεν είναι κενό. Πράγματι, αφού $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ έπεται ότι $\sum_{n=m_1+1}^{\infty} a_n = +\infty$ και άρα υπάρχει $n \geq m_1 + 1$ με $a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \dots + a_n > b_0 - x$. Θέτουμε

$$m_2 = \min N_2 \quad \text{και} \quad b_1 = \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_k$$

Από τον ορισμό του m_2 έπεται ότι

$$b_0 - b_1 < x \leq b_0 - b_1 + a_{m_2}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά επιλέγουμε $1 \leq m_1 < m_2 < \dots$ τέτοια ώστε αν θέσουμε

$$b_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} a_k \quad \text{και} \quad B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k$$

τότε να ισχύει

$$B_{2n} - a_{m_{2n+1}} \leq x < B_{2n} \quad \text{και} \quad B_{2n+1} < x \leq B_{2n+1} + a_{m_{2n+2}} \quad (2)$$

για κάθε $n \geq 0$. Άρα,

$$|B_n - x| \leq a_{m_{n+1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επειδή $a_n \rightarrow 0$ έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = \lim B_n = x$.