

Κυρτή Ανάλυση (2024–25)

Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Ημερομηνία παράδοσης: 16 Μαρτίου 2025)

1. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, συμμετρικό ως προς το 0. Θεωρούμε $\theta \in S^{n-1}$ και τη συνάρτηση

$$f_\theta(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|.$$

Αποδείξτε ότι

$$f_\theta(0) \geq f_\theta(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η «μέγιστη τομή» του K με υπερεπίπεδο κάθετο στο θ είναι εκείνη που περνάει από το κέντρο συμμετρίας του.

2. Έστω A και C δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα της B_2^n . Υποθέτουμε ότι

$$d(A, C) = \min\{\|a - c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n.$$

[Υπόδειξη: Θεωρήστε $a \in A$ και $c \in C$, και χρησιμοποιήστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.]

(β) Αποδείξτε ότι

$$\min\{|A|, |C|\} \leq \exp(-\rho^2 n/8) |B_2^n|.$$

3. Έστω K και T δύο συμμετρικά (ως προς το 0) κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

(α) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}[K \cap (x+T)] + \frac{1}{2}[K \cap (-x+T)] \subseteq K \cap T$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

(β) Αποδείξτε ότι $|K \cap (x+T)| \leq |K \cap T|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|_2^2/2}$$

και για κάθε μη κενό Borel σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\gamma_n(A) := \int_A \gamma_n(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx.$$

Το γ_n είναι το μέτρο του Gauss στον $\mathbb{R}^n$.

(α) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa-Leindler αποδείξτε ότι: αν A, B είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0, 1)$, τότε

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq (\gamma_n(A))^\lambda (\gamma_n(B))^{1-\lambda}.$$

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$e^{-\|x\|_2^2/2} \gamma_n(A) \leq \gamma_n(A+x) \leq \gamma_n(A).$$

5. Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τη «μοναδιαία μπάλα» του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$: είναι το σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $p > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} dx = |K| \cdot \int_0^\infty pt^{n+p-1} e^{-t^p} dt.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να γράψετε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\|x\|}^\infty pt^{p-1} e^{-t^p} dt \right) dx.$$

Αλλάξτε (προσεκτικά) τη σειρά της ολοκλήρωσης.

(β) Έστω $1 \leq p < \infty$. Αποδείξτε ότι ο όγκος της $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \leq 1\}$ είναι ίσος με

$$|B_p^n| = \frac{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)}.$$

6. Έστω $f, g, h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in (0, 1)$ ώστε

$$h(x^\lambda y^{1-\lambda}) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty h(x) dx \geq \left(\int_0^\infty f(x) dx \right)^\lambda \left(\int_0^\infty g(x) dx \right)^{1-\lambda}.$$

[Υπόδειξη: Θεωρήστε τις $F(x) = f(e^x)e^x$, $G(x) = g(e^x)e^x$ και $H(x) = h(e^x)e^x$ στο $\mathbb{R}$.]

7. (α) Έστω S μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι τα S και $\text{conv}(S)$ έχουν την ίδια διάμετρο.

(β) Έστω S, T μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι

$$\text{conv}(S + T) = \text{conv}(S) + \text{conv}(T).$$

(γ) Έστω S μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι $\text{conv}(\text{int}(S)) \subseteq \text{int}(\text{conv}(S))$. Ισχύει πάντα ισότητα;

8. Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ δύο σημεία που **δεν** ανήκουν στην κυρτή θήκη $\text{conv}(S)$ του S . Αποδείξτε ότι αν $x \in \text{conv}(S \cup \{y\})$ και $y \in \text{conv}(S \cup \{x\})$ τότε $x = y$.

9. Δίνονται κυρτά σύνολα $A_1, \dots, A_m$ στον $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i, j \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x -άξονα που τέμνει τα A_i και A_j . Αποδείξτε ότι υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x -άξονα που τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \dots, A_m$.

10. Έστω $m \geq n + 1$ και $K, C_1, \dots, C_m$ κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leq i_1 < \dots < i_{n+1} \leq m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{n+1}}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_1 \cap \dots \cap C_m$.