

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση II
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

Άσκηση 1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:

1. Αν $\lim a_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγχλίνει.
2. Αν $a_n > 0$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγχλίνει.
3. Αν $a_n > 0$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
4. Αν $a_n > 0$ και $\lim(na_n) = 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
5. Αν $a_n > 0$ και $\lim(n^2 a_n) = 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγχλίνει.
6. Αν $a_n > 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγχλίνει τότε για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_n = \pm 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ συγχλίνει.
7. Αν $a_n \in \mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγχλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ συγχλίνει.
8. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$ συγχλίνει.
9. Αν $a_n > 0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ συγχλίνει.
10. Αν (a_n) αύξουσα ακολουθία με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a - a_n)$ συγχλίνει.

Άσκηση 2. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Με κριτήρια σύγκλισης σειρών δείξτε τα εξής :

1. Αν $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$ τότε $a_n \rightarrow 0$.
2. Αν $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ τότε $a_n \rightarrow 0$.

Άσκηση 3. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n}$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$(iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(v) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$(vi) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$(vii) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Άσκηση 4. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5. (α) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με θετικούς όρους και έστω ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ για κάθε $n \geq n_0$.

(α1) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(α2) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}$ αποκλίνει.

Άσκηση 6. (Γενίκευση του κριτηρίου Συμπύκνωσης του *Cauchy*) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και έστω $(m_k)_{k=0}^{\infty}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών με $m_0 = 1$. Για κάθε $n = 0, 1, \dots$ θέτουμε $\delta_n^+ = m_{n+1} - m_n$ και $\delta_n^- = m_n - m_{n-1}$ όπου για $n = 0$, θέτουμε $\delta_0^- = m_0 = 1$.

(α) Δείξτε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^- a_{m_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n}$.

(β) Αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{\delta_n^+}{\delta_n^-} \leq c$ δείξτε ότι $\frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n}$.

(γ) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^+ a_{m_n}$ συγκλίνει.

(δ) Έστω $k \in \mathbb{N}$ και (a_n) φθίνουσα θετική. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} k^n a_{k^n}$ συγκλίνει.

Άσκηση 7. Έστω $a_n > 0$ με $\lim a_n = 0$ και έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει μια

γνησίως αύξουσα ακολουθία $0 = m_0 < m_1 < \dots$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε αν θέσουμε $b_n = \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k$

τότε $x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$.