ΠΡΟΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
05 /12/2024

***Άσκηση 1.* (0.5 x 6=3 μον)** Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές λάθος δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν (a_n) ακολουθία τέτοια ώστε $n \leq a_n \leq 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.
2. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) > 0$. Αν $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
3. Αν (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία τότε $\lim\left(a_n^2 - a_{2n}a_{2n+1}\right) = 0$.
4. Υπάρχει $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε το $f([0,1])$ είναι ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$.
5. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής μη σταθερή τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) \in \mathbb{Q}$.
6. Έστω I, J διαστήματα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to J$ γνησιώς αύξουσα με $f(I) = J$. Τότε και η f και η f^{-1} είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Λύση. (1) Σωστή: Έχουμε $n \leq a_n \leq 2n \Rightarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$. Επειδή $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{2} = 1$ από το Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

(2) Σωστή: Αν η f ήταν συνεχής στο 0, από Αρχή Μεταφοράς θα έπρεπε $f\left(\frac{1}{n}\right) \to f(0)$ αφού $\frac{1}{n} \to 0$. Αλλά $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \to 0 < f(0)$, άτοπο.

(3) Σωστή: Οι (a_{2n}) και (a_{2n+1}) ως υπακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο με την (a_n). Άρα αν $a = \lim_n a_n$ τότε $a = \lim_n a_{2n} = \lim_n a_{2n+1}$ οπότε $\lim_n\left(a_n^2 - a_{2n}a_{2n+1}\right) = a^2 - a \cdot a = 0$.

(4) Λάθος: Όπως είναι γνωστό οι συνεχείς συναρτήσεις μεταφέρουν κλειστα και φραγμένα διαστήματα σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα. Πιο συγκεκριμμένα από το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών και το Θεώρημα της Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής το $f([0,1])$ είναι το κλειστό φραγμένο διάστημα $[m, M]$ όπου $m = \min\{f(x) : x \in [0,1]\}$ και $M = \max\{f(x) : x \in [0,1]\}$.

(5) Σωστή: Αφού η f δεν είναι σταθερή θα λαμβάνει δύο διαφορετικές τιμές και επειδή είναι συνεχής θα λαμβάνει και όλες τις ενδιάμεσες αυτών. Συνεπώς, από Πυκνότητα ρητών θα λαμβάνει και ρητές τιμές.

(6) Σωστή: Γνωρίζουμε ότι κάθε μονότονη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(X)$ διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι συνεχής. Επειδή οι $f : I \to \mathbb{R}$ και $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονες με $f(I) = J$ και $f^{-1}(J) = I$, είναι συνεχείς.

Άσκηση 2. Έστω η ακολουθία $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) **(1 μον.)** Υπολογίστε τον λόγο $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και βρείτε το $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

(β) **(1 μον.)** Δείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα και εξηγείστε γιατί είναι συγκλίνουσα.

(γ) **(1 μον.)** Δείξτε ότι $\lim a_n = 0$.

Λύση. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

(β) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα (αφού $a_n > 0$) η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη (από το μηδέν) έπεται ότι είναι συγκλίνουσα.

(γ) **α′ τρόπος**: Έστω $a = \lim_n a_n$. Επειδή η (a_{n+1}) είναι υπακολουθία της (a_n) έπεται ότι $\lim a_{n+1} = \lim a_n = a$. Αν $a \neq 0$, θα είχαμε

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_n a_{n+1}}{\lim_n a_n} = \frac{a}{a} = 1$$

άτοπο από το (α). Άρα $a = 0$.

β′ τρόπος: Ένας άλλος τρόπος για να δείξουμε ότι $\lim a_n = 0$ είναι να παρατηρήσουμε ότι

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1$$

και άρα $0 < a_n < \dfrac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\dfrac{1}{n} \to 0$ από το Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $a_n \to 0$.

Άσκηση 3. Έστω X μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(α) **(1 μον.)** Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to \sup X$.

(β) **(1 μον.)** Έστω M άνω φράγμα του X. Αν υπάρχει (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to M$ δείξτε ότι $M = \sup X$.

(γ) **(1 μον.)** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα. Δείξτε ότι $f(\sup X) = \sup f(X)$. (Υπόδειξη: Έστω $M = f(\sup X)$. Δείξτε ότι (i) το M είναι άνω φράγμα του συνόλου $f(X)$ και (ii) υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X με $f(x_n) \to M$).

Λύση. (α) Έστω $s = \sup X$. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $s - \epsilon < x \leq s$. Άρα για $\epsilon = \frac{1}{n}$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in X$ με $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$. Η ακολουθία (x_n) που σχηματίζεται με αυτόν τον τρόπο, από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, συγκλίνει στο s.

(β) Αρκεί να δειχθεί ότι το M είναι το μικρότερο άνω φράγμα του X. Ισοδύναμα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ το $M - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του X. Πράγματι έστω $\epsilon > 0$. Αφού $x_n \to M$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|x_n - M| < \epsilon \Leftrightarrow M - \epsilon < x_n < M + \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς υπάρχει $x \in X$ με $M - \epsilon < x$ και άρα το $M - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του X.

(γ) Θέτουμε $M = f(\sup f(X))$.

(i) το M είναι άνω φράγμα του συνόλου $f(X)$: Πράγματι, επειδή $x \leq \sup X$ για κάθε $x \in X$ και η f είναι αύξουσα έπεται ότι $f(x) \leq f(\sup X)$ για κάθε $x \in X$. Άρα το $M = f(\sup X)$ είναι άνω φράγμα του $f(X)$.

(ii) Υπάρχει ακολουθία (y_n) στο $f(X)$ με $y_n \to f(\sup X)$: Πράγματι, από το (α) ερώτημα υπάρχει (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to \sup X$. Αφού η f είναι συνεχής, από Αρχή Μεταφοράς έπεται ότι $f(x_n) \to f(\sup X)$. Άρα η ακολουθία $y_n = f(x_n)$ είναι μια ακολουθία στο $f(X)$ που συγκλίνει στο $M = f(\sup X)$.

Από (i) και (ii) έχουμε ότι το M είναι άνω φράγμα του συνόλου $Y = f(X)$ και επιπλέον υπάρχει ακολουθία (y_n) στο Y με $y_n \to M$. Από το (β) ερώτημα έπεται ότι $M = \sup Y$ δηλαδή $f(\sup X) = \sup f(X)$

Άσκηση 4. Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$ και $f : [a, b] \to [a, b]$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(a) = a$ και $f(b) = b$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in (a, b)$.

(α) **(1 μον.)** Δείξτε ότι ακριβώς ένα από τα επόμενα ισχύει.

  (I) $f(x) < x$ για όλα τα $x \in (a, b)$.

  (II) $f(x) > x$ για όλα τα $x \in (a, b)$.

(β) Υποθέτουμε ότι ισχύει το (I). Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο $x_1 \in (a, b)$ και έστω (x_n) η ακολουθία που παράγεται από το x_1 μέσω της σχέσης $x_{n+1} = f(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

  (β1) **(1 μον.)** Δείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα.

(β2) (**1 μον.**) Βρείτε το $\lim x_n$.

Λύση. (α) Έστω ότι υπήρχαν $x_1, x_2 \in [a,b]$ με $f(x_1) < x_2$ και $f(x_2) > x_2$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$. Η g είναι συνεχής και $g(x_1) < 0 < g(x_2)$. Άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ξ μεταξύ των x_1, x_2 με $g(\xi) = 0$. Αλλά τότε $\xi \in (a,b)$ και $f(\xi) = \xi$ άτοπο.

(β1) Έστω ότι $f(x) < x$ για όλα τα $x \in (a,b)$. Έστω $x_1 \in (a,b)$ και $x_{n+1} = f(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$a < x_{n+1} < x_n < b \tag{1}$$

Πράγματι, για $n = 1$ έχουμε $f(x_1) < x_1$ αφού $x_1 \in (a,b)$. Επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a,b]$ και άρα

$$a < x_1 < b \Rightarrow f(a) < f(x_1) < f(b) \Rightarrow a < x_2 < b$$

Συνεπώς η (1) ισχύει για $n = 1$. Έστω ότι (1) ισχύει για $n = k$, δηλαδή

$$a < x_{k+1} < x_k < b$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι

$$f(a) < f(x_{k+1}) < f(x_k) < f(b) \Rightarrow a < x_{k+2} < x_{k+1} < b$$

και άρα η (1) ισχύει $n = k+1$. Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής η (1) ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Άρα $x_{n+1} < x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα.

(β2) Επειδή η (x_n) είναι μονότονη και φραγμένη έχουμε ότι είναι συγκλίνουσα. Έστω $x_0 = \lim x_n$. Επειδή $a \leq x_n \leq b$ έπεται ότι $a \leq x_0 \leq b$ και άρα η f ορίζεται στο x_0. Από Αρχή Μεταφοράς έχουμε

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow x_{n+1} \to f(x_0)$$

Όμως η (x_{n+1}) είναι υπακολουθία της (x_n) οπότε

$$\lim_n x_n = \lim_n x_{n+1} \Leftrightarrow x_0 = f(x_0)$$

Επειδή $f(x) < x$ για κάθε $x \in (a,b)$ έπεται ότι είτε $x = a$ είτε $x = b$. Αφού η (x_n) είναι φθίνουσα θα πρέπει $x_n \leq x_1$ και άρα $x_0 \leq x_1$. Επειδή $x_1 < b$ έπεται ότι $x_0 < b$ και άρα $x_0 = a$.