

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

Άσκηση 1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης. Ορίζουμε $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $G(x) = \int_x^b f(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$ (αν $x = b$ θέτουμε $G(b) = \int_b^b f(x) dx = 0$). Δείξτε ότι $G'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 2. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x) dx > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^\xi f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

Άσκηση 3. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(x) dx$, $x \in [a, b]$ είναι σταθερή δείξτε ότι $f = 0$.

Άσκηση 4. Έστω $G : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $G(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2} dt$, για κάθε $x > 1$. Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο της G' .

Άσκηση 5. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow [a, b]$ παραγωγίσιμες τέτοιες ώστε $h_1(x) < h_2(x)$ για κάθε $x \in I$. Ορίζουμε την συνάρτηση $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $H(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t) dt$, για κάθε $x \in I$. Βρείτε την $H'(x)$ για κάθε $x \in I$.

Άσκηση 6. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $\int_a^b f(x) dx = 0$ δείξτε ότι $f = 0$.

Άσκηση 7. (α) Έστω $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\int_a^b h(x) dx > 0$.

(β) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

Άσκηση 8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $F_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $F_n^{(n)} = f$ (με $F_n^{(n)}(x)$ συμβολίζουμε την n -τάξης παράγωγο της F_n).

Άσκηση 9. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \ln 2$.

Άσκηση 10. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα σημείο δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(β) Γενικεύστε για συναρτήσεις $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων.

(γ) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και έχει το ίδιο ολοκλήρωμα με την f .

Άσκηση 11. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$. Αν $x_0 \in [a, b]$ και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός δείξτε ότι $F'(x_0) = \ell$.

Άσκηση 12. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a, b]$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(f, P_n) - L(f, P_n)) = 0$ δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$.

Άσκηση 13. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(\xi)$$

Άσκηση 14. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε τα εξής:
(α) $\int_a^b g(x) dx \neq 0$ και (β) υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

Άσκηση 15. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε τα εξής:
(α) Για κάθε $c \in (a, b)$, $\int_c^b g(t) dt \neq 0$. (β) Υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\int_a^\xi f(t) dt}{\int_\xi^b g(t) dt} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$