
Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2024–25)
Υποδείξεις για τις Ασκήσεις των Φυλλαδίων

1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$, και $x, y \in X$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $F \in \mathcal{F}$ έχουμε $x \in F$ αν και μόνο αν $y \in F$.

Αποδείξτε ότι: για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $x \in A$ αν και μόνο αν $y \in A$.

Υπόδειξη: Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : x, y \in A \text{ ή } x, y \notin A\}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{B}$ έχουμε ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Αν δείξουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ -άλγεβρα, τότε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}$, οπότε τελικά έχουμε ότι $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Τότε, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $A \in \mathcal{B}$ και από τον ορισμό της $\mathcal{B}$ βλέπουμε ότι $x \in A$ αν και μόνο αν $y \in A$.

Δείχνουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ -άλγεβρα.

1. Αφού $x, y \in X$ έχουμε ότι $X \in \mathcal{B}$.
2. Αν $A \in \mathcal{B}$ τότε $A \in \mathcal{A}$ άρα $A^c \in \mathcal{A}$ και είτε $x, y \in A$ οπότε $x, y \notin A^c$, ή $x, y \notin A$ οπότε $x, y \in A^c$. Αυτό δείχνει ότι $A^c \in \mathcal{B}$.
3. Έστω $A_n \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$. Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε $A_n \in \mathcal{A}$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Κατόπιν, αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x, y \in A_n$ τότε $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ενώ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $x, y \notin A_n$ τότε $x, y \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

Συνεπώς, η $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τον ορισμό της σ -άλγεβρας.

1.2. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ δύο σ -άλγεβρες στο X . Είναι απαραίτητα σωστό ότι η $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ είναι σ -άλγεβρα;
Υπόδειξη: Μπορούμε να δώσουμε ένα απλό αντιπαράδειγμα θεωρώντας το σύνολο $X = \{a, b, c\}$ και τις σ -άλγεβρες $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ και $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$$

δεν είναι σ -άλγεβρα. Αν ήταν, θα έπρεπε το σύνολο $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ να ανήκει στην $\mathcal{A}$.

1.3. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συναρτήσεων $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (α) Όλες οι σταθερές συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ανήκουν στην $\mathcal{F}$.
- (β) Αν $f, g \in \mathcal{F}$ και $c \in \mathbb{R}$ τότε οι $f + g$, $f \cdot g$ και $c \cdot f$ ανήκουν στην $\mathcal{F}$.
- (γ) Αν $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων στην $\mathcal{F}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$, τότε και η f ανήκει στην $\mathcal{F}$.

Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : \chi_A \in \mathcal{F}\}$ είναι σ -άλγεβρα στο X (με χ_A συμβολίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση του A).

Υπόδειξη: Ελέγχουμε τις ιδιότητες της σ -άλγεβρας.

1. Η $\chi_X \equiv 1$ είναι σταθερή, άρα ανήκει στην $\mathcal{F}$ (ιδιότητα (α) της $\mathcal{F}$). Συνεπώς, $X \in \mathcal{A}$.
2. Έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε, $\chi_A \in \mathcal{F}$, άρα $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A \in \mathcal{F}$ ως γραμμικός συνδυασμός της σταθερής συνάρτησης $1 \in \mathcal{F}$ και της χ_A (ιδιότητα (β) της $\mathcal{F}$). Συνεπώς, $A^c \in \mathcal{A}$.

3. Έστω (A_k) ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$. Τότε $\chi_{A_n} \in \mathcal{F}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $\chi_{A_1 \cap \dots \cap A_n} = \prod_{k=1}^n \chi_{A_k} \in \mathcal{F}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (ιδιότητα (β) της $\mathcal{F}$ και επαγωγή). Όμως, εύκολα ελέγχουμε ότι $\chi_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(x) \rightarrow \chi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}(x)$ για κάθε $x \in X$. Από την ιδιότητα (γ) της $\mathcal{F}$ έπεται ότι $\chi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} \in \mathcal{F}$, άρα $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

1.4. Αποδείξτε ότι οι οικογένειες $\mathcal{B} = \{\text{αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων του } \mathbb{R}\}$ και

$$\mathcal{D} = \{\text{αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων της μορφής } (a, b) \text{ όπου } a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

δεν είναι σ -άλγεβρες στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{Q}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Έχουμε ότι $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\} \in \mathcal{B}$ διότι κάθε $\{q_n\}$ είναι διάστημα. Αν υποθέσουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ -άλγεβρα, τότε το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ανήκει κι αυτό στην $\mathcal{B}$, άρα

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

όπου κάθε I_k είναι διάστημα. Όμως το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν περιέχει κανένα γνήσιο διάστημα, άρα κάθε I_k είναι το κενό σύνολο ή μονοσύνολο. Τότε, το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, το οποίο είναι άτοπο.

Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{D}$ είναι σ -άλγεβρα. Τότε, περιέχει όλα τα μονοσύνολα: αν $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$$

και τα ανοικτά διαστήματα $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ ανήκουν στην $\mathcal{D}$. Όμως, η $\mathcal{D}$ δεν μπορεί να περιέχει μονοσύνολα. Αν $x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ όπου $a_n \leq b_n$ στο $\mathbb{R}$, τότε είτε $a_n = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οπότε θα είχαμε $\{x\} = \emptyset$ ή υπάρχει m τέτοιος ώστε $a_m < b_m$ και τότε το $\{x\}$ περιέχει το μη τετριμμένο διάστημα (a_m, b_m) , το οποίο είναι πάλι άτοπο.

1.5. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τυχούσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το σύνολο C_f όλων των $x \in \mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής είναι G_δ -σύνολο.

(β) Αποδείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι F_σ -σύνολο αλλά δεν είναι G_δ -σύνολο.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $C_f = \mathbb{Q}$;

(δ) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $C_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{x \in \mathbb{R} : \text{υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in (x - \delta, x + \delta), |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $C_f = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Έστω $x \in C_f$ και έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $y \in (x - \delta, x + \delta)$ ισχύει $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2m}$. Τότε, για κάθε $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ έχουμε

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$

άρα $x \in A_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $C_f \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x \in C_f$: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \varepsilon$, και αφού $x \in A_m$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$

με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Ειδικότερα, για κάθε $y \in (x - \delta, x + \delta)$, θέτοντας $z = x$, παίρνουμε

$$|f(y) - f(x)| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x , δηλαδή $x \in C_f$. Έτσι, $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq C_f$.

Επίσης, κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in A_m$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Θα δείξουμε ότι $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A_m$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του A_m . Έστω $u \in (x - \delta, x + \delta)$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $(u - \delta_1, u + \delta_1) \subseteq (x - \delta, x + \delta)$. Τότε, αν $y, z \in (u - \delta_1, u + \delta_1)$ έχουμε $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$, άρα $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Συνεπώς, $u \in A_m$.

Αφού κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο και $C_f = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$, έπεται ότι το C_f είναι G_δ -σύνολο.

(β) Το $\mathbb{Q}$ είναι F_σ -σύνολο (αφού είναι αριθμήσιμο και τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα) αλλά δεν είναι G_δ -σύνολο. Αν ήταν, τότε θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Θεωρώντας μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και τα ανοικτά πυκνά σύνολα $V_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ θα είχαμε

$$\emptyset = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right),$$

το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα Baire.

(γ) Από τα (α) και (β) προκύπτει άμεσα ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $C_f = \mathbb{Q}$. Λόγω του (α) το $\mathbb{Q}$ θα ήταν G_δ -σύνολο, ενώ από το (β) αυτό δεν ισχύει.

(δ) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & , \text{ αν } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ MK}\Delta(|p|, q) = 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής στους άρρητους και ασυνεχής στους ρητούς, δηλαδή $C_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.6. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ πεπερασμένα προσθετικό μέτρο. Αν το ν είναι επίσης αριθμήσιμα υποπροσθετικό, αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο.

Υπόδειξη: Από την πεπερασμένη προσθετικότητα του ν έπεται ότι είναι και μονότονο: αν $E, F \in \mathcal{A}$ και $E \subseteq F$ τότε $\nu(E) \leq \nu(F)$.

Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^n \nu(A_k) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Έπεται ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$. Η αντίστροφη ανισότητα ισχύει αφού το ν έχει υποτεθεί αριθμήσιμα υποπροσθετικό. Άρα, $\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$. Έπεται ότι το ν είναι μέτρο.

1.7. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στην σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (δηλαδή, $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$). Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι η F είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής (δηλαδή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{y \rightarrow x^+} F(y) = F(x)$).

Υπόδειξη: Αν $x < y$ τότε $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$, άρα

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F(y)$$

λόγω της μονοτονίας του μ . Αυτό δείχνει ότι η F είναι αύξουσα.

Για να δείξουμε ότι η F είναι δεξιά συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$ αρκεί να θεωρήσουμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $x_n \rightarrow x$ και να ελέγξουμε ότι $F(x_n) \rightarrow F(x)$. Παρατηρούμε ότι: αν $A_n = (-\infty, x_n]$ τότε η (A_n) είναι φθίνουσα και

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, x].$$

Επίσης, $\mu(A_1) < \infty$ διότι το μ είναι πεπερασμένο μέτρο. Από τη συνέχεια του μέτρου (για φθίνουσες ακολουθίες συνόλων πεπερασμένου μέτρου)

$$F(x_n) = \mu(A_n) \longrightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu((-\infty, x]) = F(x).$$

Δηλαδή, η F είναι δεξιά συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mu(A_n) \rightarrow 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) < +\infty$. Αποδείξτε ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n = A_N \cup \left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1}) \right).$$

Πράγματι, αν $x \in \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ τότε είτε $x \in A_N$ ή υπάρχει ο ελάχιστος $n > N$ ώστε $x \in A_n$ και τότε $x \in A_n \setminus A_{n-1}$. Αυτό δείχνει τον εγκλεισμό $\subseteq$, ενώ ο αντίστροφος εγκλεισμός ελέγχεται εύκολα. Έπεται ότι $\mu(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) \leq \mu(A_N) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\mu(A_n) \rightarrow 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) < +\infty$, υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=M+1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) < \varepsilon$ και $\mu(A_N) < \varepsilon$ για κάθε $N \geq M$. Τότε, για κάθε $N \geq M$ έχουμε ότι $\mu(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) \leq \mu(A_N) + \varepsilon < 1 + \varepsilon$. Αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) + \varepsilon = \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

1.9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι, για κάθε $A, B, C \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$\mu(A \Delta B) \leq \mu(A \Delta C) + \mu(C \Delta B).$$

[Η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.]

Υπόδειξη: Αρκεί να ελέγξουμε τον εγκλεισμό $A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$. Κατόπιν, το συμπέρασμα προκύπτει από την υποπροσθετικότητα του μέτρου.

Για την απόδειξη του εγκλεισμού, θεωρούμε $x \in A \Delta B$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

1. Αν $x \in A \setminus B$ τότε (α) αν $x \notin C$ έχουμε ότι $x \in A \setminus C \subseteq A \Delta C$, και (β) αν $x \in C$ έχουμε ότι $x \in C \setminus B \subseteq C \Delta B$. Σε κάθε περίπτωση $x \in (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$.
2. Αν $x \in B \setminus A$ τότε (α) αν $x \notin C$ έχουμε ότι $x \in B \setminus C \subseteq C \Delta B$, και (β) αν $x \in C$ έχουμε ότι $x \in C \setminus A \subseteq A \Delta C$. Σε κάθε περίπτωση $x \in (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$.

1.10. Έστω μ και ν δύο μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(A) + \nu(X \setminus A) \leq \epsilon$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(B) = \nu(X \setminus B) = 0$.

Υπόδειξη: Από την υπόθεση, για κάθε $n \geq 1$ υπάρχει $A_n \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε

$$\mu(A_n) + \nu(X \setminus A_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ειδικότερα,

$$\mu(A_n) \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{και} \quad \nu(X \setminus A_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ορίζουμε $B = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε ότι $B \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, άρα

$$\mu(B) \leq \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0,$$

άρα $\mu(B) = 0$. Επίσης, $X \setminus B = X \setminus \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} (X \setminus A_n)$,

$$\nu(X \setminus B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} (X \setminus A_k)\right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(X \setminus A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

άρα $\nu(X \setminus B) = 0$.

2.1. Έστω X ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο. Ορίζουμε $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ με $\varphi(A) = 0$ αν το $A \subseteq X$ είναι αριθμήσιμο και $\varphi(A) = 1$ αν το $A \subseteq X$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αποδείξτε ότι το φ είναι εξωτερικό μέτρο και προσδιορίστε την σ -άλγεβρα των $\mathcal{M}_\varphi$ των φ -μετρήσιμων υποσυνόλων του X .

Υπόδειξη: Αφού το $\emptyset$ είναι αριθμήσιμο σύνολο έχουμε ότι $\varphi(\emptyset) = 0$. Η μονοτονία ελέγχεται εύκολα. Έστω τώρα (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του X . Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Αν υπάρχει n τέτοιος ώστε $\varphi(A_n) = 1$ τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ αν $\varphi(A_n) = 0$ για κάθε $n \geq 1$, τότε όλα τα A_n είναι αριθμήσιμα σύνολα, αλλά τότε το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι επίσης αριθμήσιμο και έχουμε ότι

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Από τον ορισμό, ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι φ -μετρήσιμο αν $\varphi(B) = \varphi(B \cap A) + \varphi(B \cap A^c)$ για κάθε $B \subseteq X$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Αν το A είναι αριθμήσιμο τότε: (α) αν το B είναι αριθμήσιμο έχουμε ότι τα $B, B \cap A, B \cap A^c$ είναι αριθμήσιμα, άρα $\varphi(B) = 0 = \varphi(B \cap A) + \varphi(B \cap A^c)$ και (β) αν το B είναι υπεραριθμήσιμο έχουμε ότι τα $B, B \cap A^c$ είναι υπεραριθμήσιμα και το $B \cap A$ αριθμήσιμο, άρα $\varphi(B) = 1 = \varphi(B \cap A) + \varphi(B \cap A^c)$.

Συνεπώς, κάθε αριθμήσιμο $A \subseteq X$ είναι φ -μετρήσιμο.

2. Αν το $X \setminus A$ είναι αριθμήσιμο, τότε από την προηγούμενη περίπτωση το $X \setminus A$ είναι φ -μετρήσιμο και αφού η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι σ -άλγεβρα συμπεραίνουμε ότι το A είναι κι αυτό φ -μετρήσιμο.

Συνεπώς, κάθε $A \subseteq X$ με αριθμήσιμο συμπλήρωμα είναι φ -μετρήσιμο.

3. Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και το A^c είναι υπεραριθμήσιμο τότε παίρνοντας $B = X$ έχουμε ότι $\varphi(X) = 1 < 2 = \varphi(A) + \varphi(A^c) = \varphi(X \cap A) + \varphi(X \cap A^c)$, άρα το A δεν είναι φ -μετρήσιμο.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{M}_\varphi$ αποτελείται από τα υποσύνολα A του X που είναι αριθμήσιμα ή έχουν αριθμήσιμο συμπλήρωμα.

2.2. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει εξωτερικό μέτρο φ στο $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(\{q \in \mathbb{Q} : a \leq q \leq b\}) = b - a$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{Q}$ με $a < b$.

Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχει εξωτερικό μέτρο φ στο $\mathbb{Q}$ με αυτή την ιδιότητα. Τότε, για κάθε $p \in \mathbb{Q}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτοντας $a = p - \frac{1}{n}$ και $b = p + \frac{1}{n}$, και χρησιμοποιώντας τη μονοτονία του φ παίρνουμε

$$0 \leq \varphi(\{p\}) \leq \varphi\left(\left\{q \in \mathbb{Q} : p - \frac{1}{n} \leq q \leq p + \frac{1}{n}\right\}\right) = \frac{2}{n},$$

άρα $\varphi(\{p\}) = 0$. Έπεται ότι

$$\varphi(\mathbb{Q}) \leq \sum_{p \in \mathbb{Q}} \varphi(\{p\}) = 0,$$

δηλαδή $\varphi(\mathbb{Q}) = 0$. Όμως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ πρέπει να έχουμε ότι

$$\varphi(\mathbb{Q}) \geq \varphi(\{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q \leq m\}) = m \rightarrow +\infty,$$

άρα $\varphi(\mathbb{Q}) = +\infty$ και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

2.3. Έστω φ εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X . Αποδείξτε ότι αν $E \in \mathcal{M}_\varphi$ τότε για κάθε $F \subseteq X$ ισχύει ότι

$$\varphi(E) + \varphi(F) = \varphi(E \cup F) + \varphi(E \cap F).$$

Υπόδειξη: Αν $\varphi(E) = +\infty$ ή $\varphi(F) = +\infty$ τότε $\varphi(E \cup F) = +\infty$ από τη μονοτονία του φ και έχουμε ότι

$$\varphi(E) + \varphi(F) = +\infty = \varphi(E \cup F) + \varphi(E \cap F).$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\varphi(E) < +\infty$ και $\varphi(F) < +\infty$. Τότε, $\varphi(E \cup F) \leq \varphi(E) + \varphi(F) < +\infty$ και $\varphi(E \cap F) \leq \varphi(E) < +\infty$. Αφού $E \in \mathcal{M}_\varphi$, έχουμε ότι

$$\varphi(F) = \varphi(F \cap E) + \varphi(F \cap E^c)$$

και

$$\varphi(E \cup F) = \varphi((E \cup F) \cap E) + \varphi((E \cup F) \cap E^c) = \varphi(E) + \varphi(F \cap E^c).$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\varphi(E \cup F) - \varphi(F) = \varphi(E) - \varphi(F \cap E),$$

απ' όπου έπεται ότι $\varphi(E) + \varphi(F) = \varphi(E \cup F) + \varphi(E \cap F)$.

2.4. Έστω φ εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X και $A \subseteq C \subseteq X$. Αποδείξτε ότι αν $B \in \mathcal{M}_\varphi$ και ισχύουν οι $A \subseteq B$ και $\varphi(A) = \varphi(B)$ τότε $\varphi(C) = \varphi(B \cup C)$.

Υπόδειξη: Αν $\varphi(C) = +\infty$ τότε $\varphi(B \cup C) = +\infty$ από τη μονοτονία του φ και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\varphi(C) < +\infty$. Από την προηγούμενη άσκηση, αφού $B \in \mathcal{M}_\varphi$, έχουμε ότι

$$(*) \quad \varphi(C) + \varphi(B) = \varphi(B \cup C) + \varphi(B \cap C).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\varphi(B) = \varphi(B \cap C)$. Τότε, αφού $\varphi(B) = \varphi(B \cap C) \leq \varphi(C) < +\infty$, μπορούμε να διαγράψουμε αυτούς τους δύο ίσους όρους από την $(*)$ και έχουμε το ζητούμενο.

Αφού $A \subseteq C$ και $A \subseteq B$, έχουμε ότι $A \subseteq B \cap C$, άρα

$$\varphi(B \cap C) \geq \varphi(A) = \varphi(B) \geq \varphi(B \cap C).$$

Έπεται ότι $\varphi(B) = \varphi(B \cap C)$.

2.5. (α) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $B \subseteq E$ και $\lambda^*(E \setminus B) < \varepsilon$. Αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < +\infty$. Αν $B \subseteq A$ και

$$\lambda^*(B) + \lambda^*(A \setminus B) = \lambda(A)$$

αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\lambda^*((-n, n) \cap B) + \lambda^*((-n, n) \setminus B) = 2n.$$

Υπόδειξη: (α) Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $\varepsilon = \frac{1}{n}$ για $n = 1, 2, \dots$ βρίσκουμε ακολουθία (E_n) Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $B \subseteq E_n$ και $\lambda^*(E_n \setminus B) < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Τότε, το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, έχουμε $B \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E$ και

$$\lambda^*(E \setminus B) \leq \lambda^*(E_n \setminus B) < \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

άρα $\lambda^*(E \setminus B) = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι το $E \setminus B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, άρα και το $B = E \setminus (E \setminus B)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(β) Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μετρήσιμο F_1 τέτοιο ώστε $A \setminus B \subseteq F_1$ και $\lambda^*(A \setminus B) = \lambda(F_1)$. Αν θέσουμε $F = A \cap F_1$ τότε $F \subseteq A$, $A \setminus B \subseteq F$ και αφού $F \subseteq F_1$ έπεται ότι $\lambda^*(A \setminus B) = \lambda(F)$. Επίσης, $A \setminus F \subseteq B$, άρα

$$\lambda_*(B) \geq \lambda(A \setminus F) = \lambda(A) - \lambda(F) = \lambda(A) - \lambda^*(A \setminus B) = \lambda^*(B),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιούμε την υπόθεση. Αυτό δείχνει ότι $\lambda_*(B) = \lambda^*(B)$, άρα το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αν το B είναι μετρήσιμο, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\lambda^*((-n, n) \cap B) + \lambda^*((-n, n) \setminus B) = \lambda^*((-n, n)) = 2n.$$

Αντίστροφα, υποθέτοντας ότι $\lambda^*((-n, n) \cap B) + \lambda^*((-n, n) \setminus B) = 2n = \lambda((-n, n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) για το $A = (-n, n)$ και το $B_n = (-n, n) \cap B$ και έχουμε ότι

$$\lambda(A) = \lambda((-n, n)) = \lambda^*((-n, n) \cap B) + \lambda^*((-n, n) \setminus B) = \lambda^*(A \cap B_n) + \lambda^*(A \setminus B_n)$$

(διότι $(-n, n) \setminus B = (-n, n) \setminus ((-n, n) \cap B)$), άρα το $B_n = (-n, n) \cap B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι το $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

2.6. Έστω E το σύνολο των $x \in [0, 1]$ που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα περιέχει άπειρες φορές την τετράδα ψηφίων 2024 με αυτή τη σειρά. Αποδείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο και υπολογίστε το μέτρο του.

Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$E_n = \{x \in [0, 1] : x = 0.a_1a_2 \dots a_n \dots \text{ και υπάρχει } m \geq 4n \text{ ώστε } (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}) = (2, 0, 2, 4)\}.$$

Κάθε E_n είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$ ως αριθμήσιμη ένωση (πάνω από όλα τα $m \geq 4n$) των συνόλων $F_m = \{x : (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}) = (2, 0, 2, 4)\}$ που είναι πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων (ένα για κάθε επιλογή των $a_1, \dots, a_{m-1}$). Η (E_n) είναι επίσης φθίνουσα ακολουθία συνόλων και $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, άρα το E είναι μετρήσιμο και $\lambda(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n)$. Θα δείξουμε ότι $\lambda(E_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda(E) = 1$.

Θεωρούμε το συμπλήρωμα του E_n . Έχουμε

$$\begin{aligned} E_n^c &= \bigcap_{m=4n}^{\infty} \{x \in [0, 1] : (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}) \neq (2, 0, 2, 4)\} \\ &\subseteq \bigcap_{k=n}^{\infty} \{x \in [0, 1] : (a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3}) \neq (2, 0, 2, 4)\} \\ &\subseteq \bigcap_{k=n}^N \{x \in [0, 1] : (a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3}) \neq (2, 0, 2, 4)\} \end{aligned}$$

για κάθε $N \geq n$. Όμως, επειδή οι τετράδες ψηφίων $(a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3})$ είναι ανεξάρτητες, με επαγωγή ως προς N μπορούμε να δούμε ότι

$$\lambda \left(\bigcap_{k=n}^N \{x \in [0, 1] : (a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3}) \neq (2, 0, 2, 4)\} \right) = \left(\frac{9999}{10000} \right)^{N-n+1} \rightarrow 0$$

όταν $N \rightarrow \infty$, άρα $\lambda(E_n^c) = 0$ και έτσι βλέπουμε ότι $\lambda(E_n) = 1$.

2.7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$, $x \neq y$, τέτοια ώστε $\frac{x+y}{2} \in A$.

Υπόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda(A) < \infty$ (αλλιώς θεωρούμε $A_1 \subseteq A$ με $0 < \lambda(A_1) < +\infty$ και αποδεικνύουμε το ζητούμενο για το A_1).

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ υπάρχει ανοικτό διάστημα I στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda(A \cap I) > \alpha \lambda(I).$$

Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$. Γράφοντας $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap I_n)$, από την υποπροσθετικότητα του λ παίρνουμε $\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_n)$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1 + \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_n).$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\lambda(A \cap I_m) > \frac{1}{1+\varepsilon} \lambda(I_m)$. Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{a} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ισχυρισμό βλέπουμε ότι υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε

$$\lambda(A \cap [a, b]) > \frac{2}{3}(b - a).$$

Θέτουμε $C = A \cap [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε 3 διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{3}$:

$$I_1 = [a, a + s), \quad I_2 = [a + s, a + 2s), \quad I_3 = [a + 2s, b),$$

και για κάθε $j = 1, 2, 3$ ορίζουμε $C_j = C \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, 2, 3$ θέτουμε $B_j = C_j - (j - 1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a + s)$ για κάθε $j = 1, 2, 3$ και $B_1 = C_1$. Θα δείξουμε ότι

$$(*) \quad B_1 \cap B_2 \cap B_3 \neq \emptyset.$$

Τότε, αν πάρουμε κάποιο $x \in B_1 \cap B_2 \cap B_3$ θα έχουμε ότι $x \in B_j = C_j - (j - 1)s$ δηλαδή $x + (j - 1)s \in C_j$ για κάθε $j = 1, 2, 3$. Αφού $C_j \subseteq C \subseteq A$ για κάθε j , έπεται ότι

$$x, x + s, x + 2s \in A.$$

Θέτοντας $y = x + 2s$ έχουμε ότι $x, y \in A$, $x \neq y$ και $\frac{x+y}{2} = x + s \in A$, δηλαδή το ζητούμενο.

Για την απόδειξη της $(*)$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda(I_1 \setminus (B_1 \cap B_2 \cap B_3)) &= \lambda((I_1 \setminus B_1) \cup (I_1 \setminus B_2) \cup (I_1 \setminus B_3)) \leq \sum_{j=1}^3 \lambda(I_1 \setminus B_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 \lambda((I_1 + (j - 1)s) \setminus (B_j + (j - 1)s)) = \sum_{j=1}^3 \lambda(I_j \setminus C_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 \lambda(I_j \setminus (C \cap I_j)) = \sum_{j=1}^3 \lambda(I_j \cap C^c) = \lambda([a, b] \setminus C) < \frac{1}{3}(b - a) = \lambda(I_1). \end{aligned}$$

Άρα, το $I_1 \setminus (B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I_1 , και έπεται η $(*)$.

2.8. Αποδείξτε ότι υπάρχει διαμέριση $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ του $[0, 1]$ και ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^\infty (x_n + A_n)$, όπου $x_n + A_n$ είναι η μεταφορά του A_n κατά x_n .

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$ στο $[0, 1]$ και ένα σύνολο Vitali $A \subseteq [0, 1]$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας της $\sim$. Θεωρούμε μια αρίθμηση (p_n) των ρητών του $[0, 1]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_{n,1} = (p_n + A) \cap [0, 1] \quad \text{και} \quad A_{n,2} = -1 + ((p_n + A) \setminus [0, 1]).$$

Ελέγξτε ότι τα σύνολα $A_{n,j}$ είναι ανά δύο ξένα (κάποια μπορεί να είναι κενά) και σχηματίζουν διαμέριση του $[0, 1]$.

Τώρα, θεωρούμε μια αρίθμηση (s_n) του $\mathbb{Q}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$E_n = \{x \in \mathbb{R} : x - s_n \in A\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ρητός $p_x \in [0, 1]$ τέτοιος ώστε $x - [x] - p_x \in A$ και υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $[x] + p_x = s_n$, άρα $x \in E_n$.

Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$$E_n = (p_n + A) + (s_n - p_n) = [A_{n,1} \cup (1 + A_{n,2})] + (s_n - p_n) = (A_{n,1} + (s_n - p_n)) \cup (A_{n,2} + (1 + s_n - p_n)).$$

Θέτοντας $x_{n,1} = s_n - p_n$ και $x_{n,2} = 1 + s_n - p_n$ έχουμε ότι

$$\mathbb{R} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_{n,1} + A_{n,1}) \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_{n,2} + A_{n,2}) \right).$$

2.9. Έστω C το σύνολο Cantor και $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ η συνάρτηση Cantor-Lebesgue.

(α) Είναι το $C \cap \mathbb{Q}$ πυκνό στο C ;

(β) Αποδείξτε ότι $C + C = [0, 2]$, δηλαδή κάθε $x \in [0, 2]$ γράφεται ως άθροισμα $x = t + s$ δύο αριθμών $t, s \in C$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν ο $q \in [0, 1]$ είναι ρητός τότε $f(q) \in \mathbb{Q}$.

(δ) Αποδείξτε ότι αν $x \in C$ και $f(x) \in \mathbb{Q}$ τότε $x \in \mathbb{Q}$.

(ε) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα Riemann $\int_0^1 f(x) dx$.

Υπόδειξη: (α) Έστω $x \in C$. Υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Η ακολουθία $(\alpha_n(x))$ των αριστερών άκρων των $I_n(x)$ περιέχεται στο C , $\alpha_n(x) \in \mathbb{Q}$ και $|\alpha_n(x) - x| \leq \ell(I_n(x)) \rightarrow 0$. Συνεπώς, υπάρχει ακολουθία σημείων του $C \cap \mathbb{Q}$ που συγχλίνει στο x . Αυτό δείχνει ότι το $C \cap \mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο C .

(β) Έστω $x \in [0, 2]$. Τότε, $\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k}$ για κάποιους $\epsilon_k \in \{0, 1, 2\}$. Ορίζουμε $(a_k, b_k) = (0, 0), (2, 0)$ ή $(2, 2)$ αν $\epsilon_k = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα, και θεωρούμε τους $t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ και $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}$. Τότε, $t, s \in C$ και

$$\frac{t+s}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + b_k}{2} \cdot \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k} = \frac{x}{2},$$

δηλαδή $x = t + s \in C + C$. Ο άλλος εγχειρισμός, $C + C \subseteq [0, 2]$, είναι άμεσος αφού $C \subseteq [0, 1]$.

(γ) Από τον ορισμό της f , αν $q \in [0, 1] \setminus C$ τότε $f(q) \in \mathbb{Q}$ (η σταθερή τιμή που παίρνει η f σε κάθε ανοικτό διάστημα του $[0, 1] \setminus C$ είναι ρητός της μορφής $m/2^n$). Έστω $q \in [0, 1] \cap C$. Τότε, το τριαδικό ανάπτυγμα του q είναι της μορφής $q = 0.\epsilon_1 \dots \epsilon_m \theta_1 \dots \theta_k$ για κάποιους $\epsilon_j, \theta_i \in \{0, 2\}$ (από την $(m+1)$ -θέση και πέρα επαναλαμβάνονται περιοδικά τα ψηφία $\theta_1, \dots, \theta_k$ με αυτή τη σειρά). Τότε, το δυαδικό ανάπτυγμα του $f(q)$ είναι $f(q) = 0.r_1 \dots r_m \bar{s}_1 \dots \bar{s}_k$, όπου $r_j = \epsilon_j/2$ και $s_i = \theta_i/2 \in \{0, 1\}$, δηλαδή έχουμε πάλι ότι από την $(m+1)$ -θέση και πέρα επαναλαμβάνονται περιοδικά τα ψηφία $s_1, \dots, s_k$ με αυτή τη σειρά. Άρα, ο $f(q)$ είναι ρητός.

(δ) Όπως και στο (γ), αν ο $x \in C$ έχει το τριαδικό ανάπτυγμα $x = 0.\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n \dots$ με $\epsilon_j \in \{0, 2\}$ τότε $f(x) = 0.r_1 r_2 \dots r_n \dots$, όπου $r_j = \epsilon_j/2$. Αν $f(x) \in \mathbb{Q}$ τότε υπάρχει $m \geq 0$ τέτοιος ώστε από την $(m+1)$ -θέση και μετά να εμφανίζεται περιοδικά μια k -άδα ψηφίων $s_1 \dots s_k$. Τότε, από την $(m+1)$ -θέση και μετά, στο τριαδικό ανάπτυγμα του x θα εμφανίζεται η k -άδα ψηφίων $\theta_1 \dots \theta_k$, όπου $\theta_i = 2s_i$, $i = 1, \dots, k$. Αυτό σημαίνει ότι ο x είναι ρητός.

(ε) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ακολουθεί την κατασκευή του συνόλου Cantor και συγχλίνει ομοιόμορφα στην f . Λόγω της συμμετρίας της f_n ως προς την ευθεία $y = \frac{1}{2}$ μπορείτε να δείξετε επαγωγικά ότι $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ έχουμε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} \right| = \left| \int_0^1 (f(x) - f_n(x)) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx \leq \|f - f_n\|_{\infty} \rightarrow 0,$$

άρα το ολοκλήρωμα της f είναι επίσης ίσο με $\frac{1}{2}$.

2.10. Για A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ορίζουμε $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

(α) Έστω A, B μη κενά Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $A + B$ να είναι Lebesgue μετρήσιμο. Αποδείξτε ότι $\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + \lambda(B)$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν μη κενά $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ τέτοια ώστε $A + B = \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Αν $\lambda(A) = 0$ τότε για τυχόν $a \in A$ έχουμε ότι

$$\lambda(A + B) \geq \lambda(a + B) = \lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε το ζητούμενο αν $\lambda(B) = 0$. Επίσης, αν $\lambda(A) = +\infty$ ή $\lambda(B) = +\infty$ τότε εύκολα ελέγχουμε ότι $\lambda(A + B) = +\infty$, οπότε πάλι το ζητούμενο ισχύει.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα A και B έχουν θετικό και πεπερασμένο μέτρο Lebesgue. Για τυχόν $0 < \varepsilon < \min\{\lambda(A), \lambda(B)\}$ βρίσκουμε συμπαγή $E \subseteq A$ και $F \subseteq B$ τέτοια ώστε $\lambda(E) > \lambda(A) - \varepsilon$ και $\lambda(F) > \lambda(B) - \varepsilon$. Το σύνολο $E + F$ είναι συμπαγές, άρα Lebesgue μετρήσιμο. Θα δείξουμε ότι

$$\lambda(E + F) \geq \lambda(E) + \lambda(F)$$

οπότε $\lambda(A + B) \geq \lambda(E + F) > \lambda(A) + \lambda(B) - 2\varepsilon$, και αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ θα έχουμε το ζητούμενο.

Έστω t το ελάχιστο στοιχείο του F και s το μέγιστο στοιχείο του E . Τότε το $F_1 = -t + F$ έχει ελάχιστο στοιχείο το 0 και το $E_1 = -s + E$ έχει μέγιστο στοιχείο το 0. Τότε, $E_1 + F_1 \supseteq (E_1 + \{0\}) \cup (\{0\} + F_1) = E_1 \cup F_1$ και τα δύο αυτά σύνολα έχουν μοναδικό κοινό στοιχείο το 0. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda(E + F) &= \lambda((s + E_1) + (t + F_1)) = \lambda((t + s) + E_1 + F_1) = \lambda(E_1 + F_1) \geq \lambda(E_1 \cup F_1) = \lambda(E_1) + \lambda(F_1) \\ &= \lambda(-s + E) + \lambda(-t + F) = \lambda(E) + \lambda(F). \end{aligned}$$

(β) Από την προηγούμενη άσκηση γνωρίζουμε ότι $C + C = [0, 2]$, όπου C είναι το σύνολο του Cantor. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε $A_n = B_n = n + C$ και κατόπιν ορίζουμε

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + C) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n =: B.$$

Αφού $\lambda(n + C) = \lambda(C) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$. Τέλος,

$$\begin{aligned} A + B &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + C) \right) + \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + C) \right) \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ((n + C) + (n + C)) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n + (C + C)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n + [0, 2]) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n + 2] = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.1. (α) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ συνάρτηση τέτοια ώστε $\{x \in X : f(x) > q\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Είναι η f μετρήσιμη;

(β) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 0$ αν $f(x) \in \mathbb{Q}$ και $g(x) = 1$ αν $f(x) \notin \mathbb{Q}$. Είναι η g μετρήσιμη;

Υπόδειξη: (α) Έστω $b \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία ρητών $q_n \rightarrow b$. Τότε,

$$\{x \in X : f(x) > b\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > q_n\} \in \mathcal{A}$$

διότι, από την υπόθεση, $\{x \in X : f(x) > q_n\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού ο $b \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η f είναι μετρήσιμη.

(β) Αν θέσουμε $A = \{x \in X : f(x) \in \mathbb{Q}\}$ τότε $A \in \mathcal{A}$, διότι η f είναι μετρήσιμη και το $\mathbb{Q}$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, η χ_A είναι μετρήσιμη συνάρτηση, και παρατηρώντας ότι $g = 1 - \chi_A$ έχουμε το ζητούμενο.

3.2. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο X . Θεωρούμε $A \subseteq X$ και ορίζουμε $\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \text{ ή } A \cap E = \emptyset\}$. Θεωρήστε γνωστό ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ -άλγεβρα.

Έστω τώρα $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη αν και μόνο αν η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη και η f είναι σταθερή στο A .

Υπόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη. Τότε, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\{f < b\} \in \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{A}$, άρα η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο A . Τότε, υπάρχουν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ και $x \neq y$ στο A ώστε $f(x) = a$ και $f(y) = b$. Τότε, το σύνολο $\{f < b\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_A$ αφού η f είναι $\mathcal{F}_A$ μετρήσιμη, άρα το σύνολο $C = \{z \in A : f(z) < b\} = A \cap \{f < b\} \in \mathcal{F}_A$. Όμως, το C είναι μη κενό, διότι $x \in C$, άρα $A \subseteq C$ από τον ορισμό της $\mathcal{F}_A$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $y \in A \setminus C$.

Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη και παίρνει την τιμή a στο A . Έστω $b \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $b \leq a$ έχουμε ότι $A \cap \{x \in X : f(x) < b\} = \emptyset$ ενώ αν $a < b$ έχουμε ότι $\{x \in X : f(x) < b\} \supseteq \{x \in X : f(x) = a\} \supseteq A$. Έπεται ότι, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) < b\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_A$, άρα η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη.

3.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(f_n)_{n \geq 1}, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$. Έστω $0 < \alpha < \mu(X)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geq m$,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}) > \alpha.$$

Υπόδειξη: Έστω $0 < \alpha < \mu(X)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$A_m = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } n \geq m\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Η ακολουθία συνόλων (A_m) περιέχεται στην $\mathcal{A}$, είναι αύξουσα, και από την υπόθεση ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ βλέπουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $m = m_x \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x \in A_m$, δηλαδή $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. Από τη συνέχεια του μέτρου έχουμε ότι $\mu(A_m) \rightarrow \mu(X)$, και αφού $\alpha < \mu(X)$, υπάρχει m τέτοιος ώστε $\mu(A_m) > \alpha$. Τότε, για κάθε $n \geq m$ έχουμε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}) \geq \mu(A_m) > \alpha.$$

3.4. Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in [0, \infty)$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $A \subseteq [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\lambda([0, +\infty) \setminus A) < \varepsilon$ και $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο A .

Υπόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$A_{k,m} = \left\{ x \in [0, +\infty) : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \text{ για κάθε } n \geq m \right\} \quad (1)$$

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(A_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα (εξηγήστε γιατί). Τότε, αφού $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \geq 0$, έχουμε ότι $|f(x)| \leq e^{-x}$ για κάθε $x \geq 0$, άρα $|f_n(x) - f(x)| \leq 2e^{-x}$ για κάθε n και x . Από αυτή τη σχέση και από την (1) έπεται ότι

$$X \setminus A_{k,m} \subseteq \left\{ x \in [0, +\infty) : e^{-x} > \frac{1}{2k} \right\}.$$

Είναι φανερό ότι για κάθε k ισχύει ότι $\lambda(\{x \in [0, +\infty) : e^{-x} > 1/2k\}) < \infty$.

Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος Egorov ελέγχουμε ότι η ακολουθία $([0, +\infty) \setminus A_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα με τομή το κενό σύνολο. Αφού έχουμε ακολουθία συνόλων πεπερασμένου μέτρου, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([0, +\infty) \setminus A_{k,m}) = 0$ για κάθε k . Έτσι, βρίσκουμε $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu([0, +\infty) \setminus A_{k,m_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Θέτουμε

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k,m_k}.$$

Τότε, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος Egorov, ελέγχουμε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο A . Τέλος, έχουμε ότι

$$\lambda([0, +\infty) \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda([0, +\infty) \setminus A_{k,m_k}) = \varepsilon.$$

3.5. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ μια $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $r_k \rightarrow 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} r_k = +\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $A_k \in \mathcal{A}$, $k \geq 1$, τέτοια ώστε

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \chi_{A_k}(x)$$

για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη: Επαγωγικά ορίζουμε τα σύνολα $A_k = \{x \in X : f(x) \geq r_k + \sum_{j=1}^{k-1} r_j \chi_{A_j}(x)\}$ και τις συναρτήσεις $f_k(x) = \sum_{j=1}^k r_j \chi_{A_j}(x)$. Η (f_k) είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων, διότι $f_1 = r_1 \chi_{A_1} \geq 0$ και

$$f_{k+1} - f_k = r_{k+1} \chi_{A_{k+1}} \geq 0$$

αφού $r_k > 0$ για κάθε $k \geq 1$. Επίσης $f \geq f_1$ και επαγωγικά βλέπουμε ότι αν $f \geq f_{k-1}$ τότε, από τον ορισμό του A_k ,

$$f(x) \geq r_k \chi_{A_k}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} r_j \chi_{A_j}(x) = f_k(x),$$

δηλαδή $f - f_k \geq 0$ για κάθε $k \geq 1$. Θα δείξουμε ότι $f_k(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Έστω $x \in X$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $f(x) = +\infty$ τότε $f(x) \geq \sum_{j=1}^k r_j \geq r_k + \sum_{j=1}^{k-1} r_j \chi_{A_j}(x)$ για κάθε $k \geq 1$, άρα $x \in A_k$ για κάθε $k \geq 1$. Έπεται ότι

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^k r_j \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^k r_j \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} r_j = +\infty = f(x).$$

2. Αν $f(x) < +\infty$ τότε, αφού $\sum_{j=1}^{\infty} r_j = +\infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k > n$ τέτοιος ώστε $x \notin A_k$. Πράγματι, αν για κάποιον n έχουμε ότι $x \in A_k$ για κάθε $k > n$ τότε για κάθε $k > n$ έχουμε $f(x) \geq \sum_{j=1}^n r_j \chi_{A_j}(x) + \sum_{j=n+1}^k r_j \rightarrow +\infty$ όταν $k \rightarrow \infty$, το οποίο είναι άτοπο. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $x \notin A_k$ για κάποιον $k > 1$ τότε $f(x) < r_k + \sum_{j=1}^{k-1} r_j \chi_{A_j}(x) = r_k + f_{k-1}(x)$, δηλαδή

$$0 \leq f(x) - f_{k-1}(x) < r_k.$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω, βρίσκουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (k_m) τέτοια ώστε $x \notin A_{k_m}$ για κάθε m , οπότε $0 \leq f(x) - f_{k_m}(x) < r_{k_m} \rightarrow 0$.

Η ακολουθία $(f(x) - f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα, έχει μη αρνητικούς όρους και έχει μια υπακολουθία που συγχλίνει στο 0. Άρα, $f(x) - f_k(x) \rightarrow 0$, δηλαδή $f_k(x) \rightarrow f(x)$.

3.6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ συνεχών συναρτήσεων $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $g_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$ (δηλαδή, $g_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού).

Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_n : [-n, n] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-n, n]$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Luzin βρίσκουμε κλειστό σύνολο $F \subseteq [-n, n]$ τέτοιο ώστε $\lambda([-n, n] \setminus F_n) < \frac{1}{2^n}$ και η $h_n := f_n|_{F_n}$ να είναι συνεχής. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα Tietze βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $g_n : [-n, n] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g_n|_{F_n} = h_n$. Τέλος, επεκτείνουμε την g_n συνεχώς στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $g_n(x) = g_n(n)$ αν $x > n$ και $g_n(x) = g_n(-n)$ αν $x < -n$. Με αυτήν την κατασκευή, η $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και αν ορίσουμε

$$E_n = \{x \in [-n, n] : g_n(x) \neq f(x)\}$$

τότε $\lambda(E_n) < \frac{1}{2^n}$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$, για το σύνολο $Z = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ έχουμε ότι $\lambda(Z) = 0$.

Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus Z$. Τότε, υπάρχει $n_0(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n_0(x) \geq |x|$ και $x \notin E_n$ για κάθε $n \geq n_0(x)$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $n \geq n_0(x)$ έχουμε $x \in [-n, n]$ αλλά $x \notin E_n$, άρα $g_n(x) = f(x)$. Δηλαδή, η ακολουθία $(g_n(x))$ είναι τελικά σταθερή και ίση με $f(x)$. Ειδικότερα, $g_n(x) \rightarrow f(x)$.

3.7. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιους $\alpha_n > 0$, ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \alpha_n^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $E_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \alpha_n\}$ τότε $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = 0$.

(β) Η ακολουθία $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Από την ανισότητα Markov, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lambda(E_n) \leq \frac{1}{\alpha_n} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \frac{1}{\alpha_n} \cdot \alpha_n^2 = \alpha_n,$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli έπεται ότι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = \lambda(\limsup E_n) = 0.$$

(β) Από το (α) έχουμε ότι σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ ανήκει σε πεπερασμένα το πλήθος E_n , δηλαδή υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N_x$ να ισχύει

$$f_n(x) \leq \alpha_n \implies \frac{f_n(x)}{\alpha_n} \leq 1.$$

Για κάθε τέτοιο x είναι φανερό ότι η $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη, άρα έχουμε το ζητούμενο.

3.8. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n^2}^{n^2} f(x) e^{-\frac{x^2}{n}} d\lambda(x).$$

(β) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) < +\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$ (δηλαδή, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

Υπόδειξη: (α) Παρατηρούμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με

$$f_n(x) = f(x) e^{-\frac{x^2}{n}} \chi_{[-n^2, n^2]}(x)$$

είναι αύξουσα και $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-n^2}^{n^2} f(x) e^{-\frac{x^2}{n}} d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

(β) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $t > 0$ η συνάρτηση $g_t(x) = f(tx)$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} g_t d\lambda = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού γίνεται με τη γνωστή διαδικασία. Αρχικά επαληθεύουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που $f = \chi_E$ για κάποιο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) < \infty$ (που είναι και η περίπτωση που μας χρειάζεται για τη συγκεκριμένη άσκηση). Έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} g_t d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(tx) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\frac{1}{t}E}(x) d\lambda(x) = \lambda\left(\frac{1}{t}E\right) = \frac{1}{t} \lambda(E) = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \chi_E d\lambda = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g d\lambda.$$

Περνάμε τώρα στην άσκηση. Από το θεώρημα Beppo Levi και τον ισχυρισμό έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) \right) d\lambda(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(nx) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \chi_E d\lambda \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \lambda(E). \end{aligned}$$

Αφού η συνάρτηση $h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx)$ είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) = h(x) < +\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$.

3.9. Έστω $\delta > 0$ και $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ με $\lambda(A_n) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n}(x) < +\infty$$

για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Υπόδειξη: Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$B_m = \left\{ x \in [0, 1] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n}(x) \leq m \right\}.$$

Η (B_m) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων και από την υπόθεση ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n}(x) < +\infty$ για κάθε $x \in [0, 1]$ έπεται ότι $[0, 1] = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Άρα, $\lambda(B_m) \rightarrow 1 = \lambda([0, 1])$ και συνεπώς μπορούμε να βρούμε $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $\lambda([0, 1] \setminus B_{m_0}) < \frac{\delta}{2}$.

Από την υπόθεση ότι $\lambda(A_n) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\lambda(A_n \cap B_{m_0}) \geq \frac{\delta}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in B_{m_0}$ έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n}(x) \leq m_0$. Τώρα, εφαρμόζοντας το θεώρημα Beppo Levi έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_{m_0}} a_n \chi_{A_n} d\lambda = \int_{B_{m_0}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n} \right) d\lambda \leq m_0 \lambda(B_{m_0}) \leq m_0,$$

ενώ, ταυτόχρονα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_{m_0}} a_n \chi_{A_n} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda(A_n \cap B_{m_0}) \geq \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Άρα, τελικά,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_{m_0}} a_n \chi_{A_n} d\lambda \leq \frac{2m_0}{\delta} < +\infty.$$

3.10. Έστω $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ ώστε η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

να συγκλίνει για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow 0$ και $b_n \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι αν $0 < \lambda(A) < \infty$ τότε

$$\int_A \cos(nx) d\lambda(x) \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \int_A \sin(nx) d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

Ο ισχυρισμός αυτός προκύπτει με απευθείας υπολογισμό στην περίπτωση που $A = [a, b]$ για κάποιους $a < b$ στο $\mathbb{R}$, ενώ για τη γενική περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα επιχείρημα προσέγγισης, χρησιμοποιώντας την πρώτη αρχή του Littlewood για να προσεγγίσουμε το A με μια πεπερασμένη ένωση ξένων φραγμένων διαστημάτων.

Περνάμε τώρα στην άσκηση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι, επιπλέον, $\lambda(A) < \infty$. Για κάθε $n \geq 1$ μπορούμε να βρούμε $\vartheta_n \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \cos nx + b_n \sin nx = r_n \cos(n x - \vartheta_n)$, όπου $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $(a_n/r_n)^2 + (b_n/r_n)^2 = 1$, άρα υπάρχει ϑ_n τέτοιος ώστε $\cos \vartheta_n = a_n/r_n$ και $\sin \vartheta_n = b_n/r_n$). Τώρα, αν δείξουμε ότι $r_n \rightarrow 0$ θα έχουμε $a_n \rightarrow 0$ και $b_n \rightarrow 0$.

Αν η (r_n) δεν είναι μηδενική ακολουθία, τότε μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ και υπακολουθία (r_{k_n}) της (r_n) τέτοια ώστε $r_{k_n} \geq \delta$ για κάθε n . Αφού

$$r_{k_n} \cos(k_n x - \vartheta_{k_n}) = a_{k_n} \cos k_n x + b_{k_n} \sin k_n x \rightarrow 0$$

για κάθε $x \in A$, αναγκαστικά έχουμε $\cos(k_n x - \vartheta_{k_n}) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in A$, άρα και $\cos^2(k_n x - \vartheta_{k_n}) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in A$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_A \cos^2(k_n x - \vartheta_{k_n}) d\lambda(x) \rightarrow 0,$$

όμως

$$\int_A \cos^2(k_n x - \vartheta_{k_n}) d\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_A (1 + \cos 2(k_n x - \vartheta_{k_n})) d\lambda(x) \longrightarrow \frac{1}{2} \lambda(A),$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $\lambda(A) > 0$.

Για να εξηγήσουμε το γεγονός ότι $\int_A \cos 2(k_n x - \vartheta_{k_n}) d\lambda(x) \rightarrow 0$ χρησιμοποιούμε τον ισχυρισμό, αφού πρώτα γράψουμε

$$\int_A \cos 2(k_n x - \vartheta_{k_n}) d\lambda(x) = \cos(2\vartheta_{k_n}) \int_A \cos(2k_n x) d\lambda(x) + \sin(2\vartheta_{k_n}) \int_A \sin(2k_n x) d\lambda(x).$$

4.1. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής:

(α) Αν το E είναι κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]$ τότε η $\chi_E : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Υπάρχει ακολουθία μη αρνητικών Borel μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_0^1 f_n d\lambda \rightarrow 0$ και $\sup\{f_k(x) : k \geq n\} = +\infty$ για κάθε $n \geq 1$ και κάθε $x \in [0, 1]$.

Υπόδειξη: (α) *Ψευδής:* Γνωρίζουμε ότι υπάρχει σύνολο C_θ τύπου Cantor με $0 < \theta = \lambda(C_\theta) < 1$. Το C_θ είναι κλειστό και $\partial(C_\theta) = C_\theta$ (κάθε σημείο x του C_θ ανήκει στο σύνολο του C_θ διότι $(x - \delta, x + \delta) \setminus C_\theta \neq \emptyset$ αφού το C_θ δεν περιέχει διαστήματα).

Η χ_{C_θ} είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \partial(C_\theta)$, άρα το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της χ_{C_θ} έχει θετικό μέτρο. Συνεπώς, η χ_{C_θ} δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) *Αληθής:* Για κάθε $n \geq 0$ και $1 \leq k \leq 2^n$ θεωρούμε το διάστημα $I_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$. Κατόπιν, θεωρούμε την ακολουθία διαστημάτων

$$I_{0,1}, I_{1,1}, I_{1,2}, I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}, I_{2,4}, \dots$$

με αυτή τη σειρά, και την αντίστοιχη ακολουθία Borel μετρήσιμων συναρτήσεων $f_{n,k} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $f_{n,k} = 2^{n/2} \chi_{I_{n,k}}$. Για σταθερό $n \geq 0$ και οποιονδήποτε $1 \leq k \leq 2^n$ βλέπουμε ότι

$$\|f_{n,k}\|_1 = \int_0^1 f_{n,k} d\lambda = 2^{n/2} \lambda(I_{n,k}) = 2^{n/2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n/2}} \rightarrow 0$$

Επίσης, για κάθε $x \in [0, 1]$ και κάθε $n \geq 1$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $k_n(x) \in \{1, \dots, 2^n\}$ τέτοιος ώστε $x \in I_{n,k_n(x)}$ και τότε $f_{n,k_n(x)}(x) = 2^{n/2}$, άρα $\sup\{f_{n,k}(x) : 1 \leq k \leq 2^n\} = 2^{n/2} \rightarrow +\infty$ όταν $n \rightarrow \infty$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

4.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι το μέτρο μ είναι σ -πεπερασμένο.

Υπόδειξη: Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $E_n = \{x \in X : f(x) \geq 1/n\}$. Από την ανισότητα Markov έχουμε ότι

$$\mu(E_n) \leq n \int_X f d\mu < +\infty$$

διότι, από την υπόθεση, το ολοκλήρωμα της f είναι πεπερασμένο. Αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι

$$X = \{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq 1/n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Άρα, το μ είναι σ -πεπερασμένο.

4.3. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Είναι η ίδια με την Άσκηση 3.8(β). Από το θεώρημα Beppo Levi και τον ισχυρισμό έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) \right) d\lambda(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(nx) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \chi_E d\lambda \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \lambda(E). \end{aligned}$$

Αφού η συνάρτηση $h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx)$ είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) = h(x) < +\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$.

4.4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt^2) d\lambda(t).$$

Αποδείξτε ότι η g είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

Υπόδειξη: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $h_x(t) = f(t) \sin(xt^2)$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |h_x(t)| d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} |f(t) \sin(xt^2)| d\lambda(t) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| d\lambda(t) < +\infty$$

διότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Άρα, η h_x είναι ολοκληρώσιμη και ο

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt^2) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} h_x(t) d\lambda(t)$$

είναι (καλά ορισμένος) πραγματικός αριθμός. Για να δείξουμε ότι η g είναι συνεχής χρησιμοποιούμε την αρχή της μεταφοράς. Θεωρούμε ακολουθία $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ και δείχνουμε ότι $g(x_n) \rightarrow g(x)$. Ισοδύναμα, πρέπει να ελέγξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} h_{x_n}(t) d\lambda(t) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h_x(t) d\lambda(t).$$

Όμως, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $h_{x_n}(t) = f(t) \sin(x_n t^2) \rightarrow f(t) \sin(x t^2) = h_x(t)$, δηλαδή $h_{x_n} \rightarrow h_x$ κατά σημείο, και $|h_{x_n}| \leq |f|$ για κάθε $n \geq 1$, και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για τις $h_{x_n} \rightarrow h_x$ και έχουμε το ζητούμενο.

4.5. Έστω $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{(1-x)^n \cos \frac{n}{x}}{\sqrt{x}}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n d\lambda = 0$.

Υπόδειξη: Για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε $0 < 1-x < 1$, άρα $(1-x)^n \rightarrow 0$. Έπεται ότι

$$|f_n(x)| = (1-x)^n \frac{|\cos \frac{n}{x}|}{\sqrt{x}} \leq (1-x)^n \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0,$$

δηλαδή, $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο. Επίσης, $|f_n(x)| \leq g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$ με $\int_{(0,1)} g d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_0^1 f_n d\lambda \rightarrow 0.$$

4.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι: Αν (E_n) είναι μια ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} g d\mu = 0$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$.

Υπόδειξη: Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_k = \{g < \frac{1}{k}\}$. Τότε, η (B_k) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του X , και $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$ διότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Αφού $\mu(B_1) \leq \mu(X) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = 0.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε $\mu(B_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από την υπόθεση υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\int_{A_n} g d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2k_0}.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$, αφού $g \geq \frac{1}{k_0}$ στο $[0, 1] \setminus B_{k_0}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &= \mu(A_n \cap B_{k_0}) + \mu(A_n \cap ([0, 1] \setminus B_{k_0})) \leq \mu(B_{k_0}) + k_0 \int_{A_n \cap ([0, 1] \setminus B_{k_0})} \frac{1}{k_0} d\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + k_0 \int_{A_n} g d\mu \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\mu(A_n) \rightarrow 0$.

Σημείωση. Το γεγονός ότι το μ είναι πεπερασμένο μέτρο χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά. Αν θεωρήσουμε την $g(x) = \frac{1}{x^2}$ στο $[1, \infty)$, τότε η g είναι γνήσια θετική και αν θέσουμε $A_n = [n, n+1]$ έχουμε

$$\int_{A_n} g d\lambda \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow 0,$$

όμως $\lambda(A_n) = 1 \not\rightarrow 0$.

4.7. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E ώστε $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ και $0 \leq \lambda(E_n) \leq 2$ για κάθε $n \geq 0$.

(β) Υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$.

Υπόδειξη: (α) Μπορούμε να γράψουμε $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, όπου $E_n = E \cap \{x : n \leq |x| < n+1\}$ για $n \geq 1$ και $E_0 = E \cap \{x : |x| < 1\}$. Τα E_n είναι Lebesgue μετρήσιμα, ξένα, και $0 \leq \lambda(E_n) \leq 2$.

(β) Αν $\lambda(E) = 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερή συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 1$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη. Αν $\lambda(E) > 0$ τότε θεωρούμε σύνολα E_n όπως σε (α) και για κάθε $n \geq 0$ ορίζουμε $\alpha_n = 1$

αν $\lambda(E_n) = 0$ και $\alpha_n = \frac{1}{\lambda(E_n)} \cdot \frac{1}{2^n}$ αν $\lambda(E_n) > 0$. Παρατηρήστε ότι $\alpha_n \lambda(E_n) \leq 1/2^n$ για κάθε $n \geq 0$. Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \chi_{E_n}.$$

Η f είναι καλά ορισμένη, μετρήσιμη και παίρνει παντού γνήσια θετικές τιμές. Τέλος, από το θεώρημα Beppo Levi,

$$\int_E f d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda(E_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

άρα η f είναι ολοκληρώσιμη.

4.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας σ -πεπερασμένος χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $p > 0$,

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_0^{\infty} p t^{p-1} \mu(\{x : |f(x)| > t\}) dt.$$

Υπόδειξη: Έστω $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ μη αρνητική απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση, όπου $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ είναι οι γνήσια θετικές τιμές της s και $0 < \mu(E_i) < \infty$ (υποθέτουμε ότι $s \neq 0$, αλλιώς το συμπέρασμα ισχύει τετριμμένα). Παρατηρούμε ότι τα E_i είναι ξένα και ότι: αν $0 \leq t < a_1$ τότε $\{s > t\} = \bigcup_{i=1}^n E_i$, αν $a_j \leq t < a_{j+1}$ για κάποιον $1 \leq j \leq n-1$ τότε $\{s > t\} = \bigcup_{i=j+1}^n E_i$ και αν $t \geq a_n$ τότε $\{s > t\} = \emptyset$. Έχουμε

$$\int s^p d\mu = \sum_{i=1}^n a_i^p \mu(E_i)$$

και

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mu(\{s > t\}) dt &= \int_0^{a_1} p t^{p-1} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) dt + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} p t^{p-1} \mu\left(\bigcup_{i=j+1}^n E_i\right) dt \\ &= a_1^p \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) + \sum_{j=1}^{n-1} (a_{j+1}^p - a_j^p) \mu\left(\bigcup_{i=j+1}^n E_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j^p \left(\mu\left(\bigcup_{i=j}^n E_i\right) - \mu\left(\bigcup_{i=j+1}^n E_i\right) \right) + a_n^p \mu(E_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j^p \mu(E_j) + a_n^p \mu(E_n) = \sum_{j=1}^n a_j^p \mu(E_j). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\int s^p d\mu = \int_0^{\infty} p t^{p-1} \mu(\{x : s(x) > t\}) dt.$$

Έστω τώρα g μη αρνητική Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε αύξουσα ακολουθία (s_N) μη αρνητικών απλών συναρτήσεων με $s_N \rightarrow g$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\int s_N^p d\mu \rightarrow \int g^p d\mu.$$

Ορίζουμε $u, u_N : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(t) = \mu(\{g > t\})$ και $u_N(t) = \mu(\{s_N > t\})$. Από τη συζήτηση που κάναμε για την s πιο πάνω, κάθε u_N είναι φθίνουσα, για την ακρίβεια κλιμακωτή συνάρτηση με πεπερασμένες το πλήθος

θετικές τιμές, άρα μετρήσιμη. Επίσης, από την υπόθεση ότι $s_N \rightarrow g$ παίρνουμε ότι $u_N \rightarrow u$. Άρα, η u είναι μετρήσιμη και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int_0^\infty pt^{p-1} \mu(\{s_N > t\}) dt = \int_0^\infty pt^{p-1} u_n(t) dt \rightarrow \int_0^\infty pt^{p-1} u(t) dt = \int_0^\infty pt^{p-1} \mu(\{g > t\}) dt.$$

Έχουμε δείξει ότι

$$\int s_N^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1} \mu(\{s_N > t\}) dt$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, οπότε συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το ζητούμενο.

4.9. Έστω $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_{\mathbb{R}} f_n f_m d\lambda = 0$ για κάθε $m \neq n$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n^2 d\lambda = 1$ για κάθε n .

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\left\| \sum_{n=1}^N c_n f_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^N c_n^2.$$

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} f_n$ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη: (α) Θεωρούμε ότι οι f_n παίρνουν πραγματικές τιμές. Υψώνοντας στο τετράγωνο την $\sum_{n=1}^N c_n f_n$, ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις, παίρνουμε

$$\left\| \sum_{n=1}^N c_n f_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m \int_{\mathbb{R}} f_n f_m d\lambda = \sum_{n=1}^N c_n^2 \int_{\mathbb{R}} f_n^2 d\lambda = \sum_{n=1}^N c_n^2.$$

(β) Όπως στο (α) βλέπουμε ότι για κάθε $n > m$ ισχύει ότι

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} f_k \right\|_2^2 = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=m+1}^\infty \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$$

όταν τα $n, m \rightarrow \infty$ (διότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει). Αυτό δείχνει ότι η ακολουθία $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} f_k$ των μερικών

αθροισμάτων της σειράς $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} f_k$ είναι βασική στον $L^2(\mathbb{R})$, άρα συγκλίνει (σε κάποια f) στον $L^2(\mathbb{R})$. Συνεπώς,

η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} f_n$ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{R})$.

4.10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου, $\alpha > 0$, $0 < r < p$ και $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία συναρτήσεων $f_n \in L^p(\mu)$ με $\|f_n\|_p \leq \alpha$ για κάθε n και $f_n(x) \rightarrow f(x)$ σχεδόν παντού. Αποδείξτε ότι $\|f_n - f\|_r \rightarrow 0$.

Ισχύει το ίδιο αν $\mu(X) = \infty$ ή $r = p$;

Υπόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το λήμμα του Fatou,

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \liminf \int_X |f_n|^p d\mu \leq \alpha^p,$$

διότι $\|f\|_p \leq \alpha$ για κάθε n . Έπεται ότι

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \leq \int_X 2^p (|f_n|^p + |f|^p) d\mu \leq 2^{p+1} \alpha^p.$$

Έστω $\delta > 0$. Αφού $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού, από το θεώρημα Egorov υπάρχει $E \subseteq (0, 1)$ με $\mu(E^c) < \delta$, τέτοιο ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E . Για τυχόν $1 \leq r < p$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f|^r d\mu &= \int_E |f_n - f|^r d\mu + \int_{E^c} |f_n - f|^r d\mu \\ &\leq \int_E |f_n - f|^r d\mu + [\mu(E^c)]^{1-\frac{r}{p}} \left(\int_{E^c} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \\ &< \int_E |f_n - f|^r d\mu + \delta^{1-\frac{r}{p}} \left(\int_X |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \\ &\leq \int_E |f_n - f|^r d\mu + \delta^{1-\frac{r}{p}} 2^{r+\frac{1}{p}} \alpha^r. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε

$$\delta^{1-\frac{r}{p}} 2^{r+\frac{1}{p}} \alpha^r < \frac{\varepsilon^r}{2},$$

και μετά $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)|^r < \frac{\varepsilon^r}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in E$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\int_X |f_n - f|^r d\mu \leq \int_E |f_n - f|^r d\mu + \delta^{1-\frac{r}{p}} 2^{r+\frac{1}{p}} \alpha^r < \frac{\varepsilon^r}{2} + \frac{\varepsilon^r}{2} = \varepsilon^r,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_r < \varepsilon$. Άρα, $\|f_n - f\|_r \rightarrow 0$.

Αν $\mu(X) = \infty$ τότε δεν ισχύει το ίδιο. Για παράδειγμα, αν $X = [0, \infty)$ με το μέτρο Lebesgue και $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,1]}$ τότε $\|f_n\|_1 = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightarrow 0$ (και μάλιστα ομοιόμορφα) αλλά για κάθε $0 < r < 1$ έχουμε ότι

$$\|f_n\|_r^r = \int_0^\infty \frac{1}{n^r} \chi_{[0,1]} d\lambda = \frac{n}{n^r} = n^{1-r} \rightarrow \infty.$$

Επίσης, αν ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις, δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Για παράδειγμα, αν $X = [0, 1]$ με το μέτρο Lebesgue και $f_n = n \chi_{(0,1/n)}$ τότε $\|f_n\|_1 = 1$ για κάθε $n \geq 1$ και $f_n \rightarrow f \equiv 0$, οπότε $\|f_n - f\|_1 = \|f_n\|_1 = 1 \not\rightarrow 0$.
