

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
12ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx, \quad \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x + 3)(x - 1)^2} dx, \quad \int \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx.$$

Υπόδειξη: (α) Γράφουμε

$$\int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{2x}{(x + 1)^2 + 1} dx$$

και χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $y = x + 1$.

(β) Ανάλυση σε απλά κλάσματα. Ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x + 3)(x - 1)^2} = \frac{a}{x + 3} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}.$$

Ελέγξτε ότι $a = 1$, $b = 1$ και $c = 1$.

(γ) Παρατηρούμε ότι $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$ και κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα. □

Ασκηση 2. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}.$$

Υπόδειξη: (α) Παρατηρούμε ότι $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ και κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt[6]{x}$ προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{6u^5}{u^3 + u^2} du = \int \frac{6u^3}{u + 1} du$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα (μπορείτε να κάνετε τη νέα αντικατάσταση $y = u + 1$).

(γ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{x^2 - 1}$ έχουμε $\frac{dx}{x} = \frac{u du}{u^2 + 1}$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan(\sqrt{x^2 - 1}) + c.$$

(δ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1 + e^x}$ έχουμε $du = \frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}} dx = \frac{u^2 - 1}{2u} dx$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα $\int \frac{2du}{u^2 - 1}$, το οποίο υπολογίζεται εύκολα με ανάλυση σε απλά κλάσματα. □

Ασκηση 3. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \cos^3 x dx, \quad \int \cos^2 x \sin^3 x dx, \quad \int \tan^2 x dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}, \quad \int \sqrt{\tan x} dx.$$

Υπόδειξη: (α) Γράφουμε

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)(\sin x)' dx$$

και θέτουμε $u = \sin x$.

(β) Γράφουμε

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)(-1)(\cos x)' \, dx$$

και θέτουμε $u = \cos x$.

(γ) Γράφουμε

$$\int \tan^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + c.$$

(δ) Γράφουμε

$$\int \frac{1}{\cos^4 x} \, dx = \int (\tan x)' \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int (\tan x)' (\tan^2 x + 1) \, dx.$$

Με την αντικατάσταση $u = \tan x$ παίρνουμε το

$$\int (u^2 + 1) \, du = \frac{u^3}{3} + u + c.$$

Έπεται ότι

$$\int \frac{1}{\cos^4 x} \, dx = \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + c.$$

(ε) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{\tan x}$ παίρνουμε

$$du = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} (\tan^2 x + 1) \, dx = \frac{u^4 + 1}{2u} \, dx,$$

οπότε θεωρούμε το

$$\int \frac{2u^2}{u^4 + 1} \, du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα. □

Άσκηση 4. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, αποδείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

Υπόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \int (x)' \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \, dx = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \, dx - 2n \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n. \quad \square$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x \arctan x}{(1 + x^2)^2} \, dx, \quad \int \frac{x e^x}{(1 + x)^2} \, dx, \quad \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx, \quad \int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x} \, dx.$$

Υπόδειξη: (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' \arctan x dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.\end{aligned}$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο της άσκησης 4.

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= -\int \left(\frac{1}{1+x} \right)' xe^x dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x} (xe^x)' dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x} (1+x)e^x dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + c.\end{aligned}$$

(γ) Με την αντικατάσταση $u = e^x$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης.

(δ) Με την αντικατάσταση $u = \tan x$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\int \ln u du = u \ln u - u + c.$$

□

Άσκηση 6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned}&\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x} dx, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx, \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx \\ &\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int x \arctan x dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \quad \int \sqrt{x^2-1} dx.\end{aligned}$$

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $y = \tan \frac{x}{2}$. Ελέγξτε ότι $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$, $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ και $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$. Αναγόμεστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{(1+y)^2}{y^2(1+y^2)} dy,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Γράφουμε

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx$$

και κάνοντας την αντικατάσταση $u = \cos x$ αναγόμεστε στο $\int \frac{1}{u^2-1} du$, το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(γ) Με την αντικατάσταση $u = x^2 + 1$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} + c.$$

(δ) Με την αντικατάσταση $x = \sin u$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{1}{\sin u} du,$$

το οποίο υπολογίστηκε στο (β).

(ε) Χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο της Άσκησης 4.

(στ) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + c.$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1} \, dx.$$

(ζ) Με την αντικατάσταση $u = x^2 + 1$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c.$$

(η) Θέτουμε $x^2 - 1 = (x-t)^2$. Ισοδύναμα, $x = \frac{t^2+1}{2t}$. Τότε, $dx = \frac{t^2-1}{2t^2} dt$ και $x-t = \frac{1-t^2}{2t}$, οπότε αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{-(t^2-1)^2}{4t^3} dt.$$

□

Άσκηση 7. Αποδείξτε με επαγωγή ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = n!$$

Υπόδειξη: Για $n = 0$ έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-x} \, dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1.$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε, για κάθε $M > 0$ έχουμε

$$\int_0^M e^{-x} x^n \, dx = \int_0^M (-e^{-x})' x^n \, dx = -e^{-x} x^n \Big|_0^M + n \int_0^M e^{-x} x^{n-1} \, dx.$$

Αφήνοντας το $M \rightarrow \infty$ (και δεδομένου ότι $\lim_{M \rightarrow \infty} (M^n/e^M) = 0$) βλέπουμε ότι

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \, dx = n I_{n-1}.$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $I_{n-1} = (n-1)!$, τότε $I_n = n \cdot (n-1)! = n!$.

□

Άσκηση 8. Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^6} \int_0^{x^3} e^{t^2} \, dt, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t \, dt.$$

Υπόδειξη: (α) Με την αντικατάσταση $y = x^3$ βλέπουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε το

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} \, dt.$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\frac{\left(\int_0^y e^{t^2} dt\right)'}{(e^{y^2}/y)'} = \frac{e^{y^2}}{2e^{y^2} - e^{y^2}/y^2} = \frac{1}{2 - y^{-2}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

όταν $y \rightarrow +\infty$. Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^6} \int_0^{x^3} e^{t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

(α) Με την αντικατάσταση $y = x^2$ βλέπουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε το

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y^2} \int_0^y e^t \sin t dt.$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\frac{\left(\int_0^y e^t \sin t dt\right)'}{(y^2)'} = \frac{e^y \sin y}{2y} \rightarrow \frac{1}{2}$$

όταν $y \rightarrow 0^+$. Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t dt = \frac{1}{2}.$$

□