

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
11ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω $n \geq 1$ και $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι

$$T_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{και} \quad T_{n,g,x_0}(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n,g,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x - x_0)^n}}{\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_{n,g,x_0}(x)}{(x - x_0)^n}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

□

Ασκηση 2. Για καθεμία από τις δυναμοσειρές

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \text{(ii)} \quad & 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots \\ \text{(iii)} \quad & \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots \\ \text{(iv)} \quad & 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \end{aligned}$$

να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R και το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς, καθώς και τύπο για τη συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά στο $(-R, R)$.

Υπόδειξη: (α) Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου για να βρούμε για ποιες τιμές του x συγκλίνει απολύτως η σειρά. Θέτοντας $\beta_k = (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ έχουμε ότι

$$\frac{|\beta_{k+1}|}{|\beta_k|} = \frac{|x|}{k+1} \rightarrow 0 < 1,$$

άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, $R = +\infty$ και το σύνολο σύγκλισης είναι το $\mathbb{R}$.

Αφού $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας όπου x το $-x$ έχουμε

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Το δεύτερο μέρος του συλλογισμού δείχνει έμμεσα ότι $R = +\infty$, θα μπορούσαμε λοιπόν να παραλείψουμε το πρώτο μέρος.

(β) Είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $-x^3$. Γνωρίζουμε ότι συγκλίνει αν και μόνο αν $|-x^3| < 1$, δηλαδή αν και μόνο αν $|x| < 1$. Συνεπώς, $R = 1$ και το σύνολο σύγκλισης είναι το $(-1, 1)$. Από τον τύπο για το άθροισμα γεωμετρικής σειράς παίρνουμε

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots = \frac{1}{1 + x^3}, \quad x \in (-1, 1).$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k(k-1)}} = 1$, άρα το κριτήριο της ρίζας μας δίνει ότι η δυναμοσειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$. Για $x = 1$ και $x = -1$ βλέπουμε ότι οι σειρές $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}$ και $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ αντίστοιχα, συγκλίνουν απολύτως. Επομένως, το σύνολο σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots$ στο $[-1, 1]$. Σύμφωνα με το θεώρημα παραγωγίσιμης δυναμοσειρών, για κάθε $x \in (-1, 1)$ μπορούμε να παραγωγίσουμε την F παραγωγίζοντας όρο προς όρο, δηλαδή

$$F'(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Όμως, η τελευταία δυναμοσειρά παριστάνει τη συνάρτηση $\ln(1+x)$, δηλαδή $F'(x) = \ln(1+x)$. Συμπεραίνουμε ότι η F είναι η παράγουσα της $\ln(1+x)$ που ικανοποιεί την $F(0) = 0$, δηλαδή

$$F(x) = (1+x) \ln(1+x) - x, \quad x \in (-1, 1).$$

(δ) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και διαιρώντας με 2 παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ταυτόχρονα έχουμε δείξει απευθείας ότι $R = +\infty$. □

Άσκηση 3. Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} \pi^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k(k+1)}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k k!}.$$

(α) Γνωρίζουμε ότι $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $x = 2\pi$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} \pi^{2k}}{(2k)!} = \cos(2\pi) = 1.$$

(β) Παρατηρούμε ότι $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k + (-1)^k x^k}{2 \cdot k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $x = 1$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \frac{e + e^{-1}}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e}.$$

(γ) Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε ότι $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ και $\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(-1)^k x^k}{k}$, άρα

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(-1)^k x^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} [1 - (-1)^k] \frac{x^k}{k} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $x = \frac{1}{2}$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+1/2}{1-1/2}\right) = \frac{1}{2} \ln 3.$$

(δ) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $x \in (-1, 1)$. Παραγωγίζοντας, παίρνουμε $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, άρα $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Θέτοντας $x = \frac{1}{2}$ παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2.$$

(ε) Ολοκληρώνοντας την $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ βλέπουμε ότι $-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Θέτοντας $x = \frac{1}{3}$ παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k(k+1)} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}(k+1)} = 3 \ln\left(\frac{1}{1-1/3}\right) = 3 \ln(3/2).$$

(στ) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{2^k k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2e^{1/2} = 2\sqrt{e}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 4. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Υπόδειξη: Από το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} + g_n(t)$$

όπου

$$|g_n(t)| \leq \frac{e^{t^2}}{(n+1)!} (t^2)^{n+1}.$$

Επομένως,

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt + \int_0^x g_n(t) dt.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \int_0^x g_n(t) dt \right| \leq \frac{e^{x^2}}{(n+1)!} \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| \leq \frac{e^{x^2} |x|^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)}.$$

Θέτουμε

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Τότε,

$$\left| \frac{f(x) - P_{2n+1}(x)}{x^{2n+2}} \right| = \left| \frac{1}{x^{2n+2}} \int_0^x g_n(t) dt \right| \leq \frac{e^{x^2} |x|^{2n+3}}{|x|^{2n+2} (n+1)!(2n+3)} \rightarrow 0$$

όταν $x \rightarrow 0$. Από τον χαρακτηρισμό του πολωνύμου Taylor $T_{s,f,0}$ έπεται ότι

$$T_{2n+1,f,0}(x) = T_{2n+2,f,0}(x) = P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Ένας πιο άμεσος τρόπος είναι με χρήση του θεωρήματος παραγώγισης και ολοκλήρωσης δυναμοσειρών. Ολοκληρώνοντας όρο προς όρο την

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

παίρνουμε

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έπεται ότι

$$T_{2n+1,f,0}(x) = T_{2n+2,f,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

□

Άσκηση 5. (α) Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor (με κέντρο το 0) της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Για ποιες τιμές του x συγκλίνει; Να βρεθούν οι $g^{(20)}(0)$ και $g^{(21)}(0)$.

(β) Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor (με κέντρο το 0) της συνάρτησης $g(x) = (\sin x)^2$. Για ποιες τιμές του x συγκλίνει; Να βρεθούν οι $g^{(20)}(0)$ και $g^{(21)}(0)$. [Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα το ανάπτυγμα της $f(x) = \cos(2x)$.]

Υπόδειξη: (α) Έχουμε ότι $e^x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (στο σημείο $x = 0$ επεκτείνουμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ δίνοντας την τιμή $g(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, και η παραπάνω ισότητα εξακολουθεί να ισχύει). Συνεπώς, η δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού η g αναπαρίσταται από τη δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1}$ με $a_{k-1} = \frac{1}{k!}$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, για κάθε $k \geq 1$ ισχύει ότι $g^{(k-1)}(0) = (k-1)! a_{k-1} = (k-1)! \frac{1}{k!} = \frac{1}{k}$. Ειδικότερα, $g^{(20)}(0) = \frac{1}{21}$ και $g^{(21)}(0) = \frac{1}{22}$.

(α) Έχουμε ότι $(\sin x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$$g(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 4^k x^{2k}}{(2k)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, αυτή η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού η g αναπαρίσταται από τη δυναμοσειρά $-\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$ με $a_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} 4^k}{(2k)!}$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, για κάθε $k \geq 1$ ισχύει ότι $g^{(2k)}(0) = (2k)! a_{2k} = (-1)^{k-1} 4^k$ και $g^{(2k-1)}(0) = 0$. Ειδικότερα, $g^{(20)}(0) = -4^{10}$ και $g^{(21)}(0) = 0$. $\square$

Άσκηση 6. Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0 της

$$f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

στο διάστημα $(-1, 1)$ και χρησιμοποιώντας το υπολογίστε το άθροισμα

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k-1} (2k-1)}.$$

Υπόδειξη: Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad \text{και} \quad \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(-1)^k x^k}{k},$$

άρα

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(-1)^k x^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} [1 - (-1)^k] \frac{x^k}{k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2x^{2m-1}}{2m-1}. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $x = \frac{1}{3}$ βλέπουμε ότι

$$\ln 2 = \ln \left(\frac{1+1/3}{1-1/3} \right) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2m-1} (2m-1)} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k-1} (2k-1)}.$$

$\square$

Άσκηση 7. Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2/2} - e^{-x^2/2}$ με κέντρο το 0 στο $\mathbb{R}$, και χρησιμοποιώντας το αποδείξτε ότι

$$x^2 + \frac{x^6}{24} \leq e^{x^2/2} - e^{-x^2/2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Από το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης έχουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} \quad \text{και} \quad e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!},$$

άρα

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^2/2} - e^{-x^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k] x^{2k}}{2^k k!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2x^{2(2m+1)}}{2^{2m+1} (2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+2}}{2^{2m} (2m+1)!} = x^2 + \frac{x^6}{24} + \frac{x^{10}}{16 \cdot 5!} + \dots \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι αυτής της σειράς είναι μη αρνητικοί (εμφανίζονται μόνο άρτιες δυνάμεις του x , πολλαπλασιασμένες με θετικές σταθερές), άρα

$$f(x) = e^{x^2/2} - e^{-x^2/2} \geq x^2 + \frac{x^6}{24}.$$

□

Άσκηση 8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f(x) \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f''(x) \leq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη: Έστω $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $y \neq x$ στο $\mathbb{R}$, από το θεώρημα Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και y ώστε

$$0 \leq f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2 \leq f(x) + f'(x)(y-x),$$

διότι $f(y) \geq 0$ και $f''(\xi) \leq 0$ από την υπόθεση.

Αν $f'(x) > 0$ τότε αφήνοντας το $y \rightarrow -\infty$ καταλήγουμε σε άτοπο, αφού $\lim_{y \rightarrow -\infty} (f(x) + f'(x)(y-x)) = -\infty$.

Αν $f'(x) < 0$ τότε αφήνοντας το $y \rightarrow +\infty$ καταλήγουμε ομοίως σε άτοπο.

Έπεται ότι $f'(x) = 0$ για το τυχόν $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι σταθερή.

□