

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
12ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx, \quad \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x+3)(x-1)^2} dx, \quad \int \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx.$$

Ασκηση 2. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}.$$

Ασκηση 3. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \cos^3 x \, dx, \quad \int \cos^2 x \sin^3 x \, dx, \quad \int \tan^2 x \, dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}, \quad \int \sqrt{\tan x} \, dx.$$

Ασκηση 4. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, αποδείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

Ασκηση 5. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \quad \int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x} dx.$$

Ασκηση 6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx, \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int x \arctan x \, dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \quad \int \sqrt{x^2-1} \, dx.$$

Ασκηση 7. Αποδείξτε με επαγωγή ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$$

Ασκηση 8. Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^6} \int_0^{x^3} e^{t^2} dt, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t \, dt.$$