

ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^3 + y^9}$ αν $x^3 + y^9 \neq 0$ και $f(x, y) = 0$ διαφορετικά. (α) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$. (β) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Λύση. (α) Για κάθε $t \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{\frac{(tu_1) \cdot (t^3 u_2^3)}{t^3 u_1^3 + t^9 u_2^9}}{t} = \frac{u_1 u_2^3}{u_1^3 + t^6 u_2^6}$$

και άρα

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1 u_2^3}{u_1^3 + t^6 u_2^6} = \begin{cases} \frac{u_2^3}{u_1^3}, & \text{αν } u_1 \neq 0 \\ 0, & \text{αν } u_1 = 0 \end{cases}$$

(β) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 \quad (1)$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Από το (α) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$,

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0, 0) = 0,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$,

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0, 0) = 0.$$

Άρα αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ θα είχαμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = 0 = u_1$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το (α). Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$.

(α) Δείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου, ότι η f έχει στο $(0, 0)$ κατά κατεύθυνση παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(β) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση. (α) Από τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3(u_1^3 + u_1 u_2^2 + u_2^3)}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}}{t} = u_1^3 + u_1 u_2^2 + u_2^3$$

(β) Από το (α) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$ παίρνουμε $f_x(0, 0) = 1$. Ομοίως για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ παίρνουμε $f_y(0, 0) = 1$. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1 + u_2$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ και άρα από το (α) θα είχαμε

$$u_1^3 + u_1 u_2^2 + u_2^3 = u_1 + u_2$$

για κάθε $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, άτοπο (πχ για $u_1 = u_2 = 1/\sqrt{2}$ είναι εύκολο να δούμε ότι η παραπάνω ισότητα δεν ισχύει).

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 -συνάρτηση. Αν $f_x + f_y = 0$ δείξτε ότι $f_{xx} = f_{yy}$.

Λύση. Έχουμε

$$f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_x = -f_y \Rightarrow (f_x)_x = (-f_y)_x \Rightarrow f_{xx} = -f_{yx} \quad (2)$$

Ομοίως, παραγωγίζοντας ως προς y παίρνουμε,

$$f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_x = -f_y \Rightarrow (f_x)_y = (-f_y)_y \Rightarrow f_{xy} = -f_{yy} \quad (3)$$

Επειδή τώρα η f είναι C^2 , από το Θεώρημα Schwarz έχουμε

$$f_{xy} = f_{yx} \quad (4)$$

Από τις (2)–(4) παίρνουμε ότι $f_{xx} = f_{yy}$.

Άσκηση 4. Γράψτε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(0, \pi/2)$.

Λύση. Έχουμε

$$f_x(x, y) = e^x \cos y, \quad f_y(x, y) = -e^x \sin y$$

$$f_{xx}(x, y) = e^x \cos y$$

$$f_{yy}(x, y) = -e^x \cos y$$

$$f_{xy}(x, y) = (f_x)_y = -e^x \sin y$$

Άρα

$$f_x(0, \pi/2) = 0, \quad f_y(0, \pi/2) = -1, \quad f_{xx}(0, \pi/2) = 0, \quad f_{yy}(0, \pi/2) = 0, \quad f_{xy}(0, \pi/2) = -1$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(0, \pi/2)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(0, \pi/2) + f_x(0, \pi/2)(x - 0) + f_y(0, \pi/2)(y - \pi/2) + \\ &\quad \frac{1}{2} (f_{xx}(0, \pi/2)(x - 0)^2 + 2f_{xy}(0, \pi/2)(x - 0)(y - \pi/2) + f_{yy}(0, \pi/2)(y - \pi/2)^2) \\ &= 0 + 0x - (y - \pi/2) + \frac{1}{2} (0x^2 - 2x(y - \pi/2) + 0(y - \pi/2)^2) \\ &= -(y - \pi/2) - x(y - \pi/2) \\ &= \frac{\pi}{2}x - y - xy + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης μίας C^2 συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με κέντρο το $(0, 0)$ δίνεται από τον τύπο $T_2(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Δείξτε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

Λύση. Το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με κέντρο το $(0, 0)$ γενικά δίνεται από τον τύπο

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2]$$

Από την άλλη μεριά η υπόθεσή μας λέει ότι

$$T_2(x, y) = x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}(2x^2 - 2xy + 2y^2)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές παίρνουμε $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 2$ και $f_{xy}(0, 0) = -1$. Άρα το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο με $\Delta = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 4 - 1 = 3 > 0$ και $f_{xx}(0, 0) > 0$. Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου συμπεραίνουμε ότι το $(0, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 6. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^3$.

(α) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f .

(β) Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0, 0)$. Ειδικότερα, δείξτε ότι στον y -άξονα το $(0, 0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την f .

(γ) Δείξτε ότι σε κάθε ευθεία διάφορη του y -άξονα που διέρχεται από το $(0, 0)$, το $(0, 0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου για την f .

Λύση. (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 2x$ και $f_y(x, y) = 3y^2$. Συνεπώς $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο. (β) Είναι $f(0, 0) = 0$ και στον y -άξονα $f(0, y) = y^3$. Άρα $f(0, y) < f(0, 0) < f(0, y')$ για κάθε $y < 0 < y'$ και άρα η f δεν παρουσιάζει στο $(0, 0)$ τοπικό ακρότατο. (γ) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το $(0, 0)$ εκτός του y -άξονα είναι της μορφής $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Η f σε αυτές παίρνει την μορφή $f(x, \lambda x) = x^2 + (\lambda x)^3 = x^2(1 + \lambda^3 x) > 0$ όταν το x είναι αρκετά κοντά στο 0. Άρα το $(0, 0)$ είναι σημείο στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάθε ευθεία που διέρχεται από αυτό διάφορη του y -άξονα.

Άσκηση 7. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 5$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = 4y^3 - 4x$. Άρα $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 = y$ και $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^3 = x$. Συνεπώς

$$x^9 = x \Leftrightarrow x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Συνεπώς αφού $y = x^3$ έχουμε τα εξής τρία κρίσιμα σημεία

$$(0, 0), (1, 1) \text{ και } (-1, -1)$$

Είναι $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{xy}(x, y) = -4$ και $f_{yy}(x, y) = 12y^2$. Άρα $\Delta(x, y) = 144x^2y^2 - 16$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επειδή $\Delta(1, 1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$ στο $(1, 1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Ομοίως στο $(-1, -1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 8. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Είναι

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x$$

$$f_y(x, y) = 6xy - 6y$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 6$$

$$f_{yy}(x, y) = 6x - 6$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6y$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$$

$$f_y(x, y) = 6xy - 6y = 0$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x - 1) = 0$ και άρα

$$y = 0 \text{ ή } x = 1 \tag{5}$$

Για $y = 0$ από την πρώτη εξίσωση έχουμε $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Συνεπώς τα

κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία

$$(0, 0) \quad \text{και} \quad (2, 0).$$

Ομοίως για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3 + 3y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία

$$(1, 1) \quad \text{και} \quad (1, -1).$$

Συνολικά έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ και $(1, -1)$. Τώρα για κάθε (x, y) είναι

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = (6x - 6) \cdot (6x - 6) - 36y^2$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$ και άρα στο $(0, 0)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

(2) $\Delta(2, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ και άρα στο $(2, 0)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

(3) $\Delta(1, 1) = -36 < 0$ και άρα το $(1, 1)$ είναι σαγματικό.

(4) $\Delta(1, -1) = -36 < 0$ και άρα το $(1, -1)$ είναι σαγματικό.

Άσκηση 9. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 1$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = -4x + 4y$. Άρα $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 = y$ και $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = x$. Συνεπώς

$$x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

Συνεπώς αφού $y = x$ έχουμε τα εξής τρία κρίσιμα σημεία

$$(0, 0), \quad (1, 1) \quad \text{και} \quad (-1, -1)$$

Είναι $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{xy}(x, y) = -4$ και $f_{yy}(x, y) = 4$. Άρα $\Delta(x, y) = 48x^2 - 16$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επειδή $\Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$ στα σημεία $(1, 1)$ και $(-1, -1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 10. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x - y)^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3(x - y)^2$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3(x - y)^2$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 6(x - y)$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y + 6(x - y)$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6(x - y)$$

όλες συνεχείς.

Βρίσκουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3(x - y)^2 = 0$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3(x - y)^2 = 0$$

Με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^2 + y^2 = 0$ και άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0, 0)$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = 0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

$$(\alpha) f(0,0) = 0,$$

$$(\beta) \text{ για κάθε } x = y > 0, \text{ είναι } f(x,y) = 2x^3 > 0 \text{ και}$$

$$(\gamma) \text{ για κάθε } x = y < 0 \text{ είναι } f(x,y) = 2x^3 < 0.$$

Συνεπώς σε κάθε περιοχή του $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0,0)$, πράγμα που σημαίνει ότι το $(0,0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο. Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Άσκηση 11. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε,

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

$$f_y(x,y) = 4y^3 - 4y + 4x$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4$$

$$f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0$$

$$f_y(x,y) = 4y^3 - 4y + 4x = 0$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ και } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (12x^2 - 4) \cdot (12y^2 - 4) - 16$$

(1) $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

$$(\alpha) f(0,0) = 0,$$

$$(\beta) \text{ για κάθε } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ έπεται ότι } f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) \geq 0 \text{ και}$$

$$(\gamma) \text{ για κάθε } x = y \text{ έχουμε } f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 \geq 0.$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι το $(0,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f πάνω στον x -άξονα, ενώ στην ευθεία $y = x$ είναι ολικό μέγιστο. Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο. Άρα η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο αυστηρά τοπικά ελάχιστα.

Άσκηση 12. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 - x^4 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Βρίσκουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f :

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 8x - 4x^3 = 4x(2 - x^2) = 0 \\ f_y(x, y) = -4y^3 = 0 \end{cases}$$

Άρα $x = 0$ ή $x = \pm\sqrt{2}$ και $y = 0$. Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ και $(-\sqrt{2}, 0) = 0$. Επίσης $f_{xx}(x, y) = 8 - 12x^2$, $f_{yy}(x, y) = -12y^2$, $f_{xy}(x, y) = 0$. Άρα $\Delta(x, y) = (8 - 12x^2)(-12y^2)$ και συνεπώς $\Delta(0, 0) = \Delta(\sqrt{2}, 0) = \Delta(-\sqrt{2}, 0) = 0$ Άρα το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου δεν μπορεί να αποφανθεί για κανένα κρίσιμο σημείο.

Για το $(0, 0)$ έχουμε $f(0, 0) = 0$. Παρατηρούμε ότι (α) $f(0, y) = -y^4 \leq 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι μέγιστο στον y -άξονα και (β) $f(x, 0) = 4x^2 - x^4 \geq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$, δηλαδή το $(0, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο στον x -άξονα. Συνεπώς το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επίσης, παρατηρούμε ότι $f(\sqrt{2}, 0) = f(-\sqrt{2}, 0) = 4$ και για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = 4x^2 - x^4 - y^4 = -(-4x^2 + x^4 + 4) - y^4 + 4 = 4 - (x^2 - 2)^2 - y^4 \leq 4$$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στα σημεία $(\pm\sqrt{2}, 0)$.