

ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^3 + y^9}$ αν $x^3 + y^9 \neq 0$ και $f(x, y) = 0$ διαφορετικά. (α) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$. (β) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. (α) Δείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου, ότι η f έχει στο $(0, 0)$ κατά κατεύθυνση παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. (β) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 -συνάρτηση. Αν $f_x + f_y = 0$ δείξτε ότι $f_{xx} = f_{yy}$.

Άσκηση 4. Γράψτε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(0, \pi/2)$.

Άσκηση 5. Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης μίας C^2 συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με κέντρο το $(0, 0)$ δίνεται από τον τύπο $T_2(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Δείξτε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

Άσκηση 6. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^3$. (α) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο. (β) Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0, 0)$. Ειδικότερα, δείξτε ότι στον y -άξονα το $(0, 0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την f . (γ) Δείξτε ότι σε κάθε ευθεία διάφορη του y -άξονα που διέρχεται από το $(0, 0)$, το $(0, 0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου για την f .

Άσκηση 7. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 5$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 8. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 9. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 1$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 10. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x - y)^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 11. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 12. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 - x^4 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.