

ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Έστω $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

(β) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Λύση. (α) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^3}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3.$$

αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

(β) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 \tag{1}$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Από το (α) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$,

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0, 0) = 1,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$,

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0, 0) = 0.$$

Άρα αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ θα είχαμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1$$

Όμως από το (α) έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = u_1^3$. Άρα θα έπρεπε

$$u_1^3 = u_1 \Leftrightarrow u_1(u_1^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0 \text{ ή } u_1 = 1 \text{ ή } u_1 = -1$$

για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ που προφανώς δεν ισχύει (πχ. $\mathbf{u} = (0, -1)$). Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. (α) Με χρήση του

ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

(β) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Λύση. (α) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^5 u_1^4 + t^3 u_2^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^3 (t^2 u_1^4 + u_2^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1 = u_2 = 0$ αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(1) $u_2 = 0$. Τότε $u_1^2 = 1$ και $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$.

(2) $u_2 \neq 0$. Τότε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} = \frac{u_1^2 u_2}{u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2}$.

(β) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 \quad (2)$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Από το (α) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$,

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0) = 0,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$,

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0) = 0.$$

Άρα αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ θα είχαμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = 0$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το (α). Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Άσκηση 3. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = xe^{xy}$.

1. Βρείτε τις $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$. Είναι η f παραγωγίσιμη;

2. Βρείτε το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(1,1)$ στο $(1,1)$ και υπολογίστε τις κατευθύνσεις $\mathbf{u}$ ως προς τις οποίες η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(1,1)$ γίνεται μέγιστη και ελάχιστη.

Λύση. (1) Έχουμε $f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$ και $f_y(x,y) = x^2 e^{xy}$. Επειδή οι f_x και f_y είναι συνεχείς συναρτήσεις η f είναι κλάσης C^1 και άρα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(2) Έχουμε $f_x(1,1) = 2e$ και $f_y(1,1) = e$. Άρα $\nabla f(1,1) = (2e, e)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ και σε κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Άρα από την ανισότητα Cauchy-Schwarz η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 1)$ λαμβάνει μέγιστη τιμή για $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|} = \left(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\right)$ και ελάχιστη για $\mathbf{u} = -\frac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|} = -\left(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\right)$.

Άσκηση 4. Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) . Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = c$ για όλα τα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, δείξτε ότι $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c = 0$.

Λύση. Θετώντας $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ παίρνουμε $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = c$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = c(u_1 + u_2)$ και άρα

$$c(u_1 + u_2) = c$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Θετώντας $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ έχουμε ότι $c\sqrt{2} = c$ και άρα $c = 0$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το σημείο $(1, 0)$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{2x}{x^2 + y^2}, & f_y(x, y) &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ f_{xx}(x, y) &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Άρα

$$f_x(1, 0) = 2, \quad f_y(1, 0) = 0, \quad f_{xx}(1, 0) = -2, \quad f_{yy}(1, 0) = 2, \quad f_{xy}(1, 0) = 0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, 0)$ είναι το πολυώνυμο

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(1, 0)(x - 1)^2 + 2f_{xy}(1, 0)(x - 1)y + f_{yy}(1, 0)y^2) \\ &= 2(x - 1) - (x - 1)^2 + y^2 \\ &= 2x - 2 - x^2 - 1 + 2x + y^2 = -x^2 + y^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές. (α) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο. (β) Αν a, b ομόσημα δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι ολικό ακρότατο της f . (γ) Αν a, b ετερόσημα δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Λύση. (i) Επειδή $f_x(x, y) = 4ax^3$ και $f_y(x, y) = 4by^3$ έχουμε ότι $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$. Άρα το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο.

(ii) Έστω $a > 0$ και $b > 0$. Τότε $f(x, y) = ax^4 + by^4 \geq 0 = f(0, 0)$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου. Αντίστοιχα αν $a < 0$ και $b < 0$ τότε $f(x, y) \leq 0$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και στην περίπτωση αυτή το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου.

(iii) Έστω $a < 0$ και $b > 0$ (αντίστοιχα εργαζόμαστε αν $a > 0$ και $b < 0$). Τότε για όλα τα σημεία $(x, 0)$ στον x -άξονα έχουμε $f(x, 0) = ax^4 \leq 0$ ενώ για όλα τα σημεία $(0, y)$ στον y -άξονα $f(0, y) = by^4 \geq 0$. Άρα στον x -άξονα το $(0, 0)$ είναι σημείο ελαχίστου ενώ στον y -άξονα σημείο μεγίστου, οπότε το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Άσκηση 7. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 3x^2 - y$ και $f_y(x, y) = -x + 2y$. Το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 \\ f_y(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

δίνει

$$\begin{aligned} 3x^2 - y &= 0 \\ x &= 2y \end{aligned}$$

και άρα $12y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y(12y - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 1/12$. Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία για την f είναι τα

$$(0, 0) \text{ και } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$$

Επειδή $f_{xx}(x, y) = 6x$, $f_{yy}(x, y) = 2$ και $f_{xy}(x, y) = -1$ έχουμε

$$\Delta(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = -1 < 0$$

και άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό ενώ

$$\Delta\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)f_{yy}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) - f_{xy}^2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 2 - 1 > 0$$

και άρα αφού επιπλέον $f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 1 > 0$ στο $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 8. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$ και $f_y(x, y) = -4x + 4y$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$ ή ισοδύναμα $\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$. Η δεύτερη εξίσωση δίνει $y = x$ και με αντικατάσταση στην πρώτη παίρνουμε $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$. Αντίστοιχα έχουμε, $y = 0$ ή $y = 1$ ή $y = -1$, δηλαδή τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

Υπολογίζουμε τώρα τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της f και την ορίζουσα Δ του Εσσιανού πίνακα της f . Έχουμε $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{xy}(x, y) = -4$, $f_{yy}(x, y) = 4$ και $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 48x^2 - 16$. Είναι $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ και άρα το $(0, 0)$ σαγματικό σημείο. Επίσης $\Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) > 0$. Άρα τα σημεία $(-1, -1)$ είναι σημεία τοπικού ελαχίστου.

Άσκηση 9. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + 2x^2y + y^2 + \frac{2}{3}y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 + 4xy$, $f_y(x, y) = 2x^2 + 2y + 2y^2$. Επίσης $f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4y$, $f_{yy}(x, y) = 2 + 4y$, $f_{xy}(x, y) = 4y$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$. Έχουμε

$$f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } y = -x^2$$

Αν $x = 0$ τότε $f_y(x, y) = y + y^2 = 0 \Leftrightarrow y(1 + y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = -1$.

Αν $y = -x^2$ τότε $f_y(x, y) = 2x^2 - 2x^2 + 4x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0, 0)$ και $(0, -1)$.

Επειδή $\Delta(0, -1) = (-4)^2 + 12 > 0$ και $f_{xx}(0, -1) - 4 < 0$ το $(0, -1)$ είναι τοπικό μέγιστο.
Για το $(0, 0)$ έχουμε ότι $\Delta(0, 0) = 0$. Για να δούμε αν είναι τοπικό ακρότατο παρατηρούμε ότι

$$f(x, y) = (x^2 + y)^2 + \frac{2}{3}y^3$$

Άρα για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ στην παραβολή $y = -x^2$ έχουμε $f(x, y) < 0$ ενώ για κάθε (x, y) στην ευθεία $y = 0$ έχουμε $f(x, y) = x^4 > 0$. Οπότε το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Άσκηση 10. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 8x^3 - 12xy + y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 24x^2 - 12y$, $f_y(x, y) = -12x + 3y^2$. Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 24x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ -4x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ -4x + (2x^2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ 4x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{cases}$$

και άρα παίρνουμε δύο κρίσιμα σημεία τα $(0, 0)$ και $(1, 2)$. Επειδή $f_{xx}(x, y) = 48x$, $f_{yy}(x, y) = 6y$, $f_{xy}(x, y) = -12$ και $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$, για το $(0, 0)$ έχουμε $\Delta(0, 0) < 0$ οπότε το $(0, 0)$ είναι σαγματικό. Αντίστοιχα $\Delta(1, 2) > 0$ και $f_{xx}(1, 2) > 0$ και άρα η f στο $(1, 2)$ έχει τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 11. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 6x^2 - 6x$, $f_y(x, y) = 6y^2 + 6y$. Άρα $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$ και $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -1$. Συνεπώς έχουμε τα εξής τέσσερα κρίσιμα σημεία

$$(0, 0), (0, -1), (1, 0) \text{ και } (1, -1)$$

Είναι $f_{xx}(x, y) = 12x - 6$, $f_{xy}(x, y) = 0$ και $f_{yy}(x, y) = 12y + 6$. Άρα $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = (12x - 6)(12y + 6)$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = -36 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επειδή $\Delta(0, -1) = 36 > 0$ και $f_{xx}(0, -1) = -6 < 0$ στο $(0, -1)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

Επειδή $\Delta(1, 0) = 36 > 0$ και $f_{xx}(1, 0) = 6 > 0$ στο $(1, 0)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Επειδή $\Delta(1, -1) = -36 < 0$ και $f_{xx}(1, -1) = -6 < 0$ το $(1, -1)$ είναι σαγματικό σημείο.

Άρα η f έχει ακριβώς ένα τοπικό μέγιστο στο σημείο $(0, -1)$ και ακριβώς ένα τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(1, 0)$.

Άσκηση 12. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4x^2y + 4y^2 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 8xy, \quad f_y(x, y) = -4x^2 + 8y - 4y^3$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 4x^3 - 8xy = 0 \\ -4x^2 + 8y - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει

$$4x^3 - 8xy = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } y = \frac{x^2}{2}$$

1) Αν $x = 0$ τότε από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$-4x^2 + 8y - 4y^3 = 8y - 4y^3 = 0 \Leftrightarrow 4y(2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = \pm\sqrt{2}$$

οπότε παίρνουμε τα σημεία $(0, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$ και $(0, \sqrt{2})$.

2) Αντίστοιχα αν $y = \frac{x^2}{2}$ η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$-4x^2 + 8y - 4y^3 = -4y^3 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

οπότε έχουμε πάλι το σημείο $(0, 0)$. Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα εξής:

$$(0, 0), \quad (0, -\sqrt{2}) \quad \text{και} \quad (0, \sqrt{2})$$

Προχωρούμε στην εύρεση των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης. Έχουμε

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 8y, \quad f_{yy}(x, y) = 8 - 12y^2, \quad f_{xy}(x, y) = -8x$$

και συνεπώς

$$\Delta(x, y) = (12x^2 - 8y)(8 - 12y^2) - 64x^2$$

οπότε

$$\Delta(0, y) = -8y(8 - 12y^2)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

• Για το σημείο $(0, 0)$ έχουμε $\Delta(0, 0) = 0$ και άρα το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου δεν αποφαινεται. Παρατηρούμε όμως ότι

$$f(x, y) = (x^4 - 4x^2y + 4y^2) - y^4 = (x^2 - 2y)^2 - y^4 = -y^4 < 0$$

όταν $y = x^2/2$ ενώ

$$f(x, 0) = x^4 > 0$$

Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

• Για το σημείο $(0, \sqrt{2})$ έχουμε

$$\Delta(0, \sqrt{2}) = -8\sqrt{2}(8 - 24) > 0$$

Επιπλέον $f_{xx}(0, \sqrt{2}) = -8\sqrt{2} < 0$. Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου έχουμε ότι στο $(0, \sqrt{2})$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

• Για το σημείο $(0, -\sqrt{2})$ έχουμε

$$\Delta(0, -\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}(8 - 24) < 0$$

Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου έχουμε ότι το $(0, -\sqrt{2})$ είναι σαγματικό σημείο της f .

Άρα η f έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο το $(0, \sqrt{2})$, που ειδικότερα είναι τοπικό μέγιστο.