

ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

Άσκηση 1. Έστω $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$. (α) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$. (β) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. (α) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$. (β) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Άσκηση 3. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = xe^{xy}$. (α) Βρείτε τις $f_x(x, y)$ και $f_y(x, y)$. Είναι η f παραγωγίσιμη; (β) Βρείτε το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(1, 1)$ στο $(1, 1)$ και υπολογίστε τις κατευθύνσεις $\mathbf{u}$ ως προς τις οποίες η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(1, 1)$ γίνεται μέγιστη και ελάχιστη.

Άσκηση 4. Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) . Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = c$ για όλα τα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, δείξτε ότι $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c = 0$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε το πολώνυμο Taylor της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το σημείο $(1, 0)$.

Άσκηση 6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές. (α) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο. (β) Αν a, b ομόσημα δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι ολικό ακρότατο της f . (γ) Αν a, b ετερόσημα δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Άσκηση 7. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 8. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 9. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + 2x^2y + y^2 + \frac{2}{3}y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 10. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 8x^3 - 12xy + y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 11. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 12. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4x^2y + 4y^2 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.