

ΣΕΜΦΕ
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(a) = a^2$ για κάθε a άρρητο. Δείξτε ότι $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (a_n) αρρήτων με $\lim a_n = x$. Η g είναι συνεχής και άρα από Αρχή Μεταφοράς, έχουμε $\lim g(a_n) = g(x)$. Όμως $g(a_n) = f(a_n) - a_n^2 = 0$ και άρα $g(x) = \lim g(a_n) = 0$. Συνεπώς $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, αύξουσα με την ιδιότητα $f(0) = 0$ και $|f(x)| \geq |x| \forall x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί.

Λύση. Επειδή $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα με $f(0) = 0$ έχουμε ότι

$$x < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \text{ και } x > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

Συνεπώς επειδή $|f(x)| \geq |x| \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι

$$x < 0 \Rightarrow f(x) \leq x \text{ και } x > 0 \Rightarrow f(x) \geq x$$

Έστω $y \in \mathbb{R}$. Αν $x_1 = -|y| - 1 < 0$ και $x_2 = |y| + 1 > 0$ τότε

$$f(x_1) \leq x_1 < y < x_2 \leq f(x_2)$$

και από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών έχουμε το συμπέρασμα.

Άσκηση 3. Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) Η συνάρτηση $f : (0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1) \\ 2 & x \in (1, 2] \end{cases}$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Έστω $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιος} \\ 1 & n \text{ περιττός} \end{cases}$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση. (α) Η πρόταση είναι σωστή. Η f είναι συνεχής αφού είναι συνεχής σε καθένα από τα δύο ξένα διαστήματα που διαμερίζουν το πεδίο ορισμού της. Επίσης δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού για $\epsilon = 1/2$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $0 < x < 1 < y < 2$ με $|y - x| < \delta$ και $|f(y) - f(x)| = 2 - 1 = 1 > \epsilon$.

(β) Η πρόταση είναι σωστή. Το A αποτελείται από απομονωμένα σημεία και συνεπώς κάθε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A είναι συνεχής συνάρτηση. Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού αν $x_n = \frac{1}{2n}$ και $y_n = \frac{1}{2n+1}$ έχουμε $x_n - y_n \rightarrow 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$.

Άσκηση 4. (α) Έστω $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. (i) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. (ii) Ισχύει το ίδιο για το γινόμενο ή το πηλίκο.

(β) Έστω $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(X) \subseteq Y$. Αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς δείξτε ότι και η συνθεσή τους $F(x) = f(g(x))$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση. (α) (i) Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και έστω $F = \lambda f + \mu g$. Έστω $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες με $|x_n - y_n| \rightarrow 0$. Θα δείξουμε ότι $|F(x_n) - F(y_n)| \rightarrow 0$. Πράγματι,

$$|F(x_n) - F(y_n)| = |\lambda f(x_n) + \mu g(x_n) - \lambda f(y_n) - \mu g(y_n)| \leq |\lambda| |f(x_n) - f(y_n)| + |\mu| |g(x_n) - g(y_n)| \quad (1)$$

Αλλά οι f, g είναι ομοιόμορφα συνεχείς και συνεπώς

$$|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0 \text{ και } |g(x_n) - g(y_n)| \rightarrow 0 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $|F(x_n) - F(y_n)| \rightarrow 0$.

(ii) Δεν ισχύει το ίδιο για το γινόμενο ή το πηλίκο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $h(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά $h = fg$ με $f(x) = g(x) = x$ που είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ομοίως, η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ $x > 0$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά είναι το πηλίκο δύο ομοιόμορφα συνεχών.

(β) Έστω $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες με $|x_n - y_n| \rightarrow 0$. Θα δείξουμε ότι $|F(x_n) - F(y_n)| \rightarrow 0$. Πράγματι, από την ομοιόμορφη συνέχεια των g και f έχουμε

$$|x_n - y_n| \rightarrow 0 \Rightarrow |g(x_n) - g(y_n)| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(g(x_n)) - f(g(y_n))| \rightarrow 0 \Rightarrow |F(x_n) - F(y_n)| \rightarrow 0$$

Άσκηση 5. Είναι σωστό ότι αν μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε είναι ομοιομορφισμός δηλαδή και η ίδια και η αντίστροφή της είναι συνεχείς συναρτήσεις?

Λύση. Η πρόταση είναι σωστή. Έστω $f : I \rightarrow J$ γνησίως μονότονη όπου I, J διαστήματα και $J = f(I)$. Γνωρίζουμε ότι κάθε μονότονη συνάρτηση με πεδίο τιμών διάστημα (ασχέτως αν το πεδίο ορισμού είναι διάστημα ή όχι) είναι συνεχής. Άρα επειδή το πεδίο τιμών της f είναι το διάστημα J η f είναι συνεχής. Ομοίως η $f^{-1} : J \rightarrow I$ έχει πεδίο τιμών το διάστημα I και άρα είναι και αυτή συνεχής.

Άσκηση 6. Μια συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I διάστημα του $\mathbb{R}$ καλείται Lipschitz αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, για όλα τα $x, y \in I$.

(α) Δείξτε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά δεν είναι Lipschitz.

(γ) Αν f παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο δείξτε ότι η f είναι Lipschitz.

(δ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση. (α) Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \epsilon/C$. Τότε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < C|x - x_0| < \epsilon$$

(β) Επειδή η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται σε κλειστό φραγμένο διάστημα και είναι και συνεχής έπεται ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν τώρα η f ήταν Lipschitz θα έπρεπε να υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|x - y|$, για κάθε $x, y \geq 0$. Ειδικότερα, αν $y = 0$ τότε για κάθε $x > 0$,

$$\sqrt{x} \leq Cx \Rightarrow x \leq C^2 x^2 \Rightarrow \frac{1}{C^2} \leq x$$

που φυσικά είναι αδύνατον (πχ. $x = \frac{1}{2C^2}$).

(γ) Έστω $|f'(x)| \leq C$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $x, y \in I$ με $x \neq y$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, υπάρχει ξ μεταξύ των x και y τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &= f'(\xi) \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(\xi)| \leq C \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \end{aligned}$$

(δ) Προκύπτει από το (γ) αφού $|(\sin x)'| = |\cos x| \leq 1$.

Άσκηση 7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $a \in [-1, 1]$ υπάρχει ακολουθία (x_n) με $x_n \neq 0$, $x_n \rightarrow 0$ και $f(x_n) \rightarrow a$.

(γ) Δείξτε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής;

Λύση. (α) Έστω $a \in [-1, 1]$. Επειδή η $\sin x; [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ είναι επί υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi]$ με $\sin \theta = a$. Θέτουμε $x_n = \frac{1}{2\pi n + \theta}$. Τότε $f(x_n) = \sin(2\pi n + \theta) = a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $f(x_n) \rightarrow a$.

(β) Έστω $x_n = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}$ και $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| = 2$ και άρα $|f(x_n) - f(y_n)| \not\rightarrow 0$.

Άσκηση 8. Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $x_0 \in X$ δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(α) Η f είναι συνεχής στο x_0 .

(β) Για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα.

Λύση. (α) $\Rightarrow$ (β): Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 , από Αρχή Μεταφοράς έχουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα στο $f(x_0)$.

(β) $\Leftrightarrow$ (α): Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα. Θα δείξουμε ότι η υπόθεση αυτή συνεπάγεται ότι $f(x_0) = \lim f(x_n)$ για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x_0$.

Πράγματι, έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \rightarrow x_0$. Σχηματίζουμε την ακολουθία $(\tilde{x}_n)$ θέτοντας

$$\tilde{x}_{2n} = x_n \text{ και } \tilde{x}_{2n-1} = x_0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$ και άρα από την υπόθεσή μας θα πρέπει η $(f(\tilde{x}_n))$ να είναι συγκλίνουσα. Τότε κάθε υπακολουθία της $(f(\tilde{x}_n))$ θα πρέπει να συγκλίνει στο ίδιο όριο. Ειδικότερα,

$$\lim f(\tilde{x}_{2n}) = \lim f(\tilde{x}_{2n-1}) \Leftrightarrow \lim f(x_n) = \lim f(x_0) = f(x_0)$$

Άσκηση 9. Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αν το X είναι φραγμένο δείξτε ότι και το $f(X)$ είναι φραγμένο.

Λύση. Έστω ότι το $f(X)$ δεν είναι άνω φραγμένο. Αυτό σημαίνει ότι

$$(\forall M \in \mathbb{R}) (\exists x \in X) \text{ τέτοιο ώστε } f(x) > M \quad (3)$$

Με βάση την (3) ορίζουμε αναδρομικά μια ακολουθία (x_n) στο X με την ιδιότητα

$$f(x_{n+1}) > f(x_n) + 1 \quad (4)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι από την (3) για $M = 1$ υπάρχει $x_1 \in X$ με $f(x_1) > 1$. Ομοίως για $M = f(x_1) + 1$ υπάρχει $x_2 \in X$ με $f(x_2) > f(x_1) + 1$. Ομοίως για $M = f(x_2) + 1$ υπάρχει $x_3 \in X$ με $f(x_3) > f(x_2) + 1$ κ.ο.κ.

Η (x_n) είναι ακολουθία στο X και άρα είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass η (x_n) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}) . Έστω (y_n) και (z_n) να είναι οι υπακολουθίες των αρτίων και αντίστοιχα των περιττών όρων της (x_{k_n}) , δηλαδή

$$y_n = x_{k_{2n}} \text{ και } z_n = x_{k_{2n-1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι (y_n) και (z_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο με την (x_{k_n}) (αφού είναι υπακολουθίες της) και άρα $|y_n - z_n| \rightarrow 0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής θα πρέπει $|f(y_n) - f(z_n)| \rightarrow 0$. Όμως

$$|f(y_n) - f(z_n)| = |f(x_{k_{2n}}) - f(x_{k_{2n-1}})| \stackrel{(4)}{>} 1$$

Καταλήξαμε συνεπώς σε άτοπο. Άρα το $f(X)$ είναι άνω φραγμένο. Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι το $f(X)$ είναι κάτω φραγμένο.