

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
10ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Έστω $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και

$$f(x) = \int_{\alpha}^x (x-t)g(t)dt.$$

Αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί τις

$$f''(x) = g(x), \quad f(\alpha) = f'(\alpha) = 0.$$

Ασκηση 2. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0,$$

αποδείξτε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Ασκηση 3. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x).$$

Ασκηση 4. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

[Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $Q(t) = \int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx$, $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι είναι πολώνυμο δευτέρου βαθμού με μη αρνητικές τιμές.]

Ασκηση 5. (α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b, 1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

[Υπόδειξη: Για δοθέν $\varepsilon > 0$ επιλέξτε κατάλληλο $0 < b \leq 1$ και κατάλληλη διαμέριση Q του $[b, 1]$ ώστε για την διαμέριση $P = \{0\} \cup Q$ του $[0, 1]$ να ισχύει ότι $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.]

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

Ασκηση 6. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

[Υπόδειξη: Εφαρμόστε το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού για τη συνεχή συνάρτηση f' σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$.]

Ασκηση 7. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0 < f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \leq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

[Υπόδειξη: Μελετήστε τη συνάρτηση

$$G(t) = \left(\int_0^t f(x) dx \right)^2 - \int_0^t [f(x)]^3 dx$$

στο $[0, 1]$, εξετάζοντας το πρόσημο της G' .]

Άσκηση 8. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right).$$