

ΣΑΤΜ
Πρόοδος Μαθηματικής Ανάλυσης
29/11/2024

Άσκηση 1. Έστω $f(x) = \sinh x$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) **(2 μον)** Βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 3$ της συνάρτησης f , με κέντρο το $a = 0$.

(β) **(1 μον)** Αν $0 < x < 1$ δείξτε ότι $0 < \sinh x < 2$.

(γ) **(2 μον)** Αν $0 < x < 1$ δείξτε ότι $x + \frac{x^3}{6} < \sinh x < x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}$.

Λύση. (α) Η συνάρτηση $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα Έχουμε $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \quad f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x, \quad f^{(3)}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Άρα $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ και $f^{(3)}(0) = 1$. Το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 3$ της συνάρτησης $f(x) = \sinh x$ με κέντρο το $a = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{6}$$

(β) Επειδή η $\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$0 < x < 1 \Rightarrow \sinh 0 < \sinh x < \sinh 1 \Rightarrow 0 < \sinh x < \frac{e - e^{-1}}{2} < \frac{e}{2} < 2$$

(γ) Από τον Τύπο Taylor έχουμε ότι υπάρχει $0 < \xi < x$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = T_3(x) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \Rightarrow \sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{\sinh \xi}{24}x^4 \quad (1)$$

Επειδή $0 < \xi < x$ και $0 < x < 1$ έπεται ότι $0 < \xi < 1$ και άρα από το (β),

$$0 < \sinh \xi < 2 \quad (2)$$

Τώρα η (1) σε συνδυασμό με την (2) δίνει ότι την ζητούμενη ανισότητα.

Άσκηση 2. (α) **(1 μον)** Βρείτε το $\tan\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$.

(β) **(1 μον)** Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \arccos x + \arcsin x$, για κάθε $x \in (-1, 1)$. Τι συμπέρασμα βγάζετε για την f ;

Λύση. (α) Έστω $y = \arcsin(3/5)$. Τότε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\sin y = 3/5$. Άρα $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = 4/5$. Οπότε

$$\tan\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{3}{4}$$

(β) Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$f'(x) = (\arccos x + \arcsin x)' = (\arccos x)' + (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Άρα η f είναι σταθερή. Επειδή

$$F(0) = \arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

έπεται ότι $F(x) = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Άρα, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Άσκηση 3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(\alpha) \text{ (1 μον)} \int \frac{x}{x^2 + 6x + 25} dx.$$

$$(\beta) \text{ (2 μον)} \int_1^2 \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx.$$

$$(\gamma) \text{ (2 μον)} \int_0^1 \sqrt{3 - 2x - x^2} dx.$$

(Υπόδειξη: $3 - 2x - x^2 = 4 - (x + 1)^2$)

Λύση. (α) Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2 + 6x + 25} dx = \int \frac{x}{x^2 + 6x + 9 + 16} dx = \frac{1}{16} \int \frac{x}{\left(\frac{x+3}{4}\right)^2 + 1} dx.$$

Θέτουμε $y = \frac{x+3}{4} \Rightarrow x = 4y - 3, dx = 4dy$ οπότε

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 6x + 25} dx &= \frac{4}{16} \int \frac{4y - 3}{y^2 + 1} dy = \int \frac{y}{y^2 + 1} dy - \frac{3}{4} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \\ &= \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) - \frac{3}{4} \arctan y \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(x+3)^2}{16} + 1 \right) - \frac{3}{4} \arctan \left(\frac{x+3}{4} \right) \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} &= \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x^2 + 2x + 1)} \\ &= \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} 5x^2 + 20x + 6 &= A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \\ &= Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A \end{aligned}$$

Άρα $A = 6, B = -1, C = 9$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx &= 6 \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx + 9 \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= 6 \ln x \Big|_1^2 - \ln(x+1) \Big|_1^2 - 9 \frac{1}{x+1} \Big|_1^2 \\ &= 6 \ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) - 9 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 7 \ln 2 - \ln 3 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(γ) Έχουμε $3 - 2x - x^2 = 4 - (x + 1)^2 = 4\left(1 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)$. Θέτουμε

$$u = \frac{x+1}{2}$$

οπότε $dx = 2du$ και έχουμε

$$\int_0^1 \sqrt{3 - 2x - x^2} \, dx = 4 \int_{1/2}^1 \sqrt{1 - u^2} \, du$$

Στην συνέχεια θέτουμε

$$u = \sin t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$$

οπότε $du = \cos t \, dt$ και έχουμε

$$\int_{1/2}^1 \sqrt{1 - u^2} \, du = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{\cos t \sin t + t}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi/2}.$$

Συνοψίζοντας,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{3 - 2x - x^2} \, dx &\stackrel{u=\frac{x+1}{2}}{=} 4 \int_{1/2}^1 \sqrt{1 - u^2} \, du \\ &\stackrel{u=\sin t}{=} 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \\ &= 4 \frac{\cos t \sin t + t}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = 4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$