ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και αν $f(0)=f'(0)=0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n)=0$.

(β) Αν η $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και $f(0)=f(1)=f(2)=0$, τότε υπάρχει $x_0\in(0,2)$ ώστε $f''(x_0)=0$.

(γ) Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0\in(a,b)$, παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$ και αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$, τότε $f'(x_0)=\ell$.

(δ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta,\delta)$.

Ασκηση 2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{2}+x^2\cos\frac{1}{x}$ αν $x\neq 0$ και $f(0)=0$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0)>0$ αλλά δεν υπάρχει $\delta>0$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Ασκηση 3. Αποδείξτε ότι

(α) $\sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2}$, για κάθε $x\in[-1,1]$.

(β) $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=2\arctan x,$ για κάθε $x\geq 0$.

Ασκηση 4. (α) Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)|\leq\frac{1}{x}$ για κάθε $x>1$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+\sqrt{x})-f(x)]=0$.

(β) Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha>1$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}=0.$$

Ασκηση 5. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $1-\dfrac{1}{x}\leq\log x\leq x-1$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)=x$.

(γ) Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^x$.

Ασκηση 6. (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $g=f^2+(f')^2$.]

(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0)=1$, $f'(0)=0$ και $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x)=\cos x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ασκηση 7. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0)=0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $0\leq f'(x)\leq 2f(x)$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή και ίση με 0 στο $[0,1]$.

Ασκηση 8. (α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\tan x=x$ έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k=\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$.

(β) Έστω a_k η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα I_k, $k\in\mathbb{N}$. Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{k\to\infty}(a_{k+1}-a_k)$ και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.