



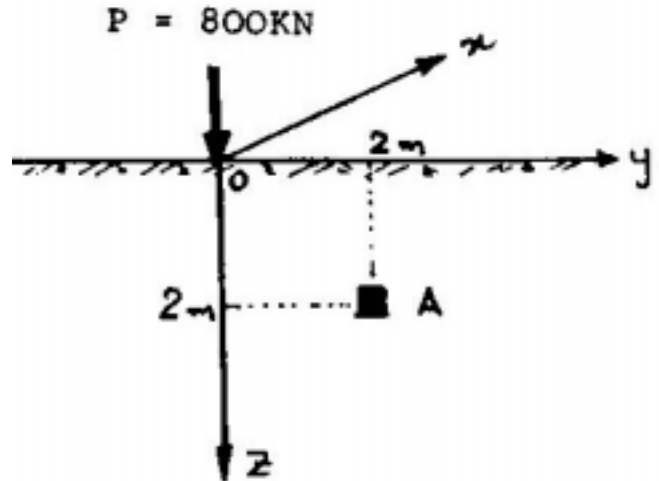
5^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (Μετάδοση των τάσεων στο έδαφος)

1. Ελαστικός ομοιογενής ημίχωρος με $E = 90 \text{ MPa}$ και $\nu = 0.30$ φορτίζεται με συγκεντρωμένο φορτίο $P = 800 \text{ kN}$.

Ζητούνται για το σημείο A ($x_A = 0, y_A = z_A = 2\text{m}$):

α) Οι τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ και τ_{yz}

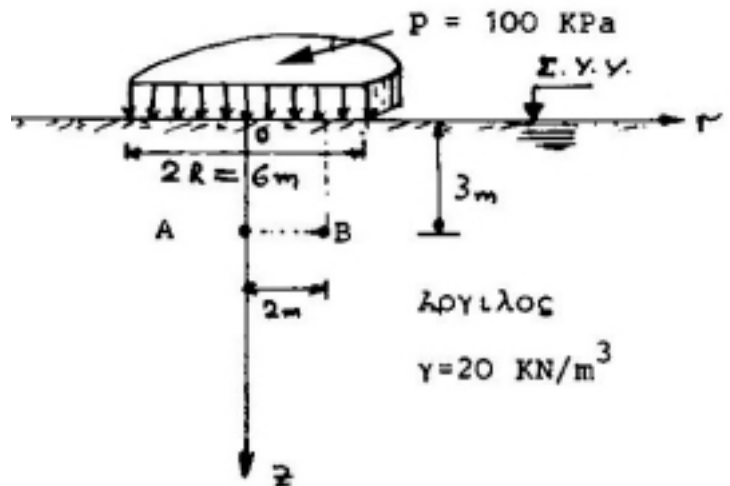
β) Οι κύριες τάσεις $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ και οι διευθύνσεις τους.



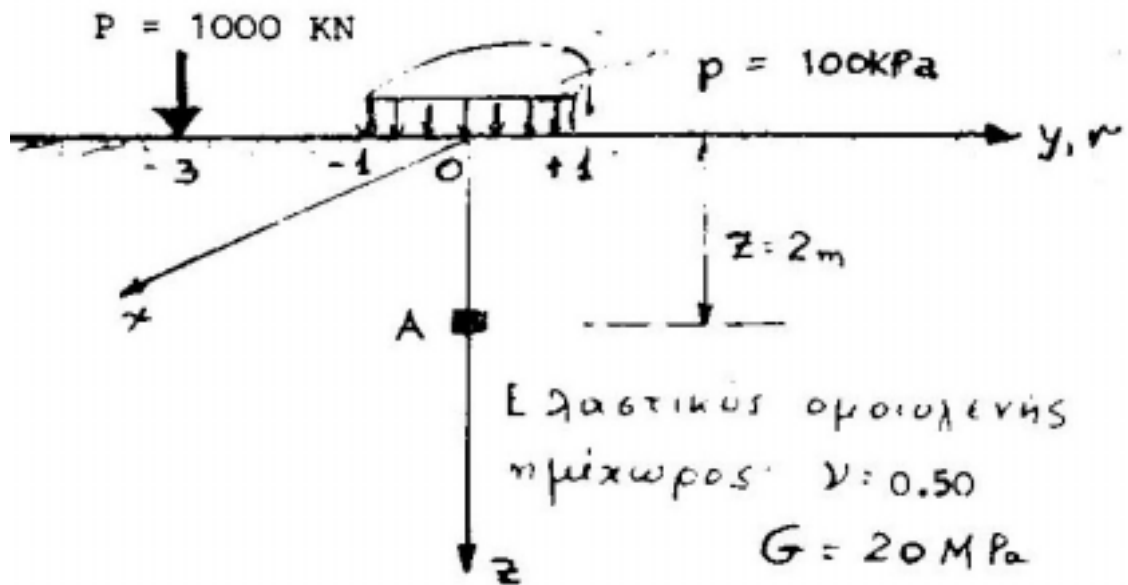
2. Κυκλική δεξαμενή διαμέτρου 6m φορτίζει την επιφάνεια αργιλικής αποθέσεως με ομοιόμορφη τάση $p = 100 \text{ kPa}$. Ζητούνται :

α) Οι κύριες τάσεις $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_3$ και οι διευθύνσεις τους, στα σημεία A ($r_A = 0, z_A = 3\text{m}$) και B ($r_B = 2\text{m}, z_B = 3\text{m}$), οι οποίες οφείλονται στο πρόσθετο φορτίο (p) της δεξαμενής.

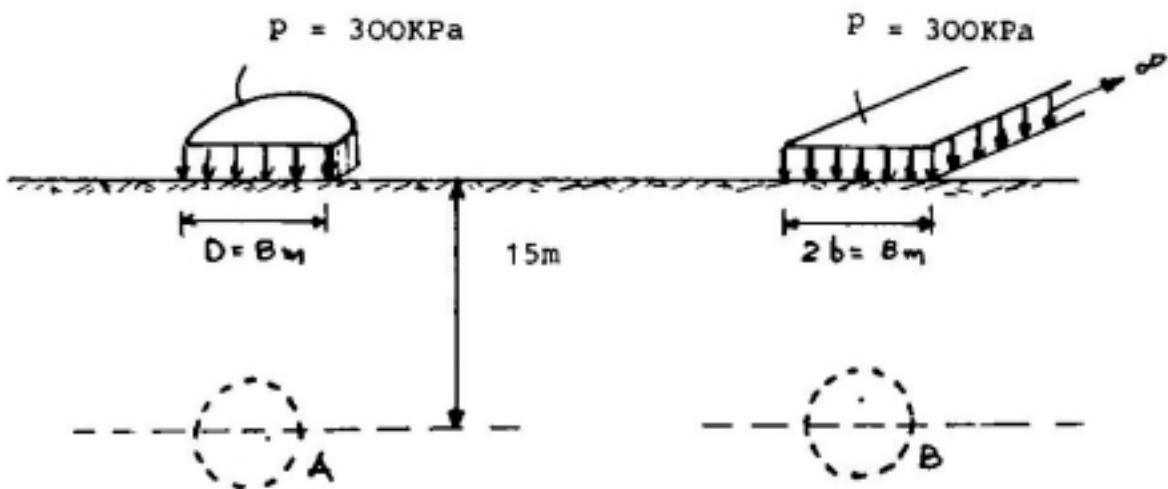
β) Η συνολική πίεση πόρων που αναπτύσσεται στο σημείο A αμέσως μετά την επιβολή του φορτίου της δεξαμενής. Δίδεται η παράμετρος της πίεσεως πόρων της αργίλου, $A = 0.30$, που προσδιορίστηκε από κατάλληλη τριαξονική δοκιμή.



3. Για το στοιχείο A ($x_A = 0$, $y_A = 0$, $z_A = 2m$) ζητούνται:
 α) Οι κύριες τάσεις σ_1 , σ_2 , σ_3 και οι διευθύνσεις τους.
 β) Η ανηγμένη διόγκωση ϵ_{vol} .



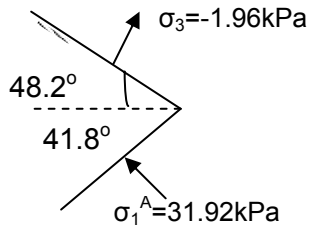
4. Μελετούνται δύο εναλλακτικές θέσεις σήραγγας υπονόμου, η θέση A και η θέση B. Απαντήστε ποιοτικά ποιά από τις δύο θα προτιμούσατε και γιατί;



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 5^{ης} ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

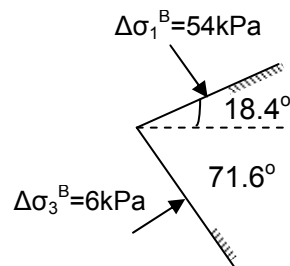
1. (α) $\sigma_x^A = \sigma_\theta^A = -0.77 \text{ kPa}$, $\sigma_y^A = \sigma_r^A = 13.12 \text{ kPa}$, $\sigma_z^A = 16.84 \text{ kPa}$,
 $\tau_{yz} = \tau_{rz} = 16.84 \text{ kPa}$

(β)



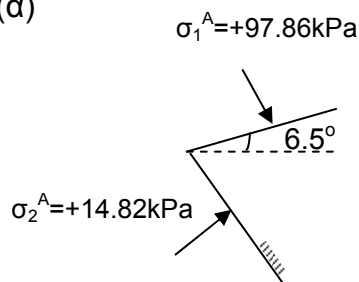
$$\sigma_2 = \sigma_\theta = \sigma_x = -0.77 \text{ kPa}$$

2. (α) $\Delta\sigma_1^A = \Delta\sigma_z^A = 64.5 \text{ kPa}$
 $\Delta\sigma_3^A = \Delta\sigma_r^A = 10 \text{ kPa}$



(β) $u = 56.35 \text{ kPa}$

3. (α)



$$\sigma_3^A = \sigma_\theta^A = \sigma_x^A = +1.8 \text{ kPa}$$

(β) $\epsilon_{vol}^A = 0$

4. Τη θέση Α διότι στην κλειδα της σήραγγας $\Delta\sigma_z^A < \Delta\sigma_z^B$

5η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ

Επιμέλεια : Γιάννης Κουκούλης , Υποψήφιος Διδάκτορας ΕΜΠ

Λίγα «Θεωρητικά» !!!

Η παρούσα σειρά ασκήσεων αναφέρεται σε ελαστικές επιλύσεις αξονοσυμμετρικών φορτίσεων – παραμορφώσεων . Οι περιπτώσεις που εξετάζονται είναι οι εξής :

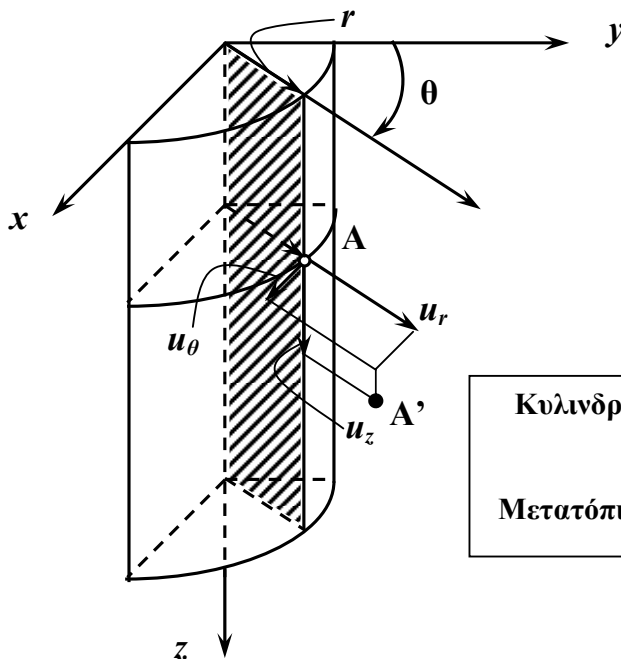
- ✓ **Φόρτιση από συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο , P**
- ✓ **Φόρτιση από ομοιόμορφη ορθή πίεση , p , σε κυκλική επιφάνεια**

Και στις δύο περιπτώσεις το έδαφος προσομοιάζεται σαν ελαστικός ισότροπος ημίχωρος .

Γενικά σε περιπτώσεις αξονοσυμμετρικής φόρτισης και γεωμετρίας , δηλαδή σε αξονική (κυλινδρική) συμμετρία , οι τάσεις και όλα τα υπόλοιπα μεγέθη σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων είναι ανεξάρτητα της γωνίας θ . Δηλαδή , ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$u_{\theta} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0 , \quad \frac{\partial(\circ)}{\partial\theta} = 0 \rightarrow \text{παραγώγιση μεγέθους } (\circ) \text{ ως προς την γωνία } \theta$$

ΠΡΟΣΟΧΗ : Ισχύει , $\varepsilon_{\theta} = -\frac{u_r}{r} \neq 0$.

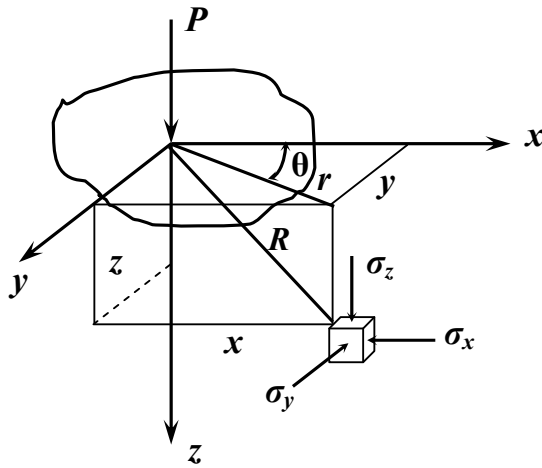


Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων
&
Μετατόπιση του Σημείου A (u_r, u_{θ}, u_z)

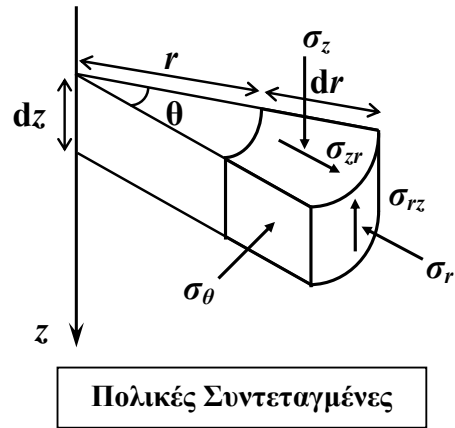
Ως προς την μεθοδολογία επίλυσης , στην περίπτωση του συγκεντρωμένου κατακόρυφου φορτίου P οι κατανομές των τάσεων σε οποιοδήποτε σημείο του ημιχώρου (έδαφος) προκύπτουν με κλειστή αναλυτική μορφή . Αντιθέτως , στην περίπτωση της ομοιόμορφης ορθής κυκλικής πίεσης p οι

τιμές της πρόσθετης κατακόρυφης τάσης (σ_{zz}) δίνονται υπό μορφή αδιάστατων διαγραμμάτων . Υπό μορφή αδιάστατων διαγραμμάτων δίνονται και οι τιμές των κυρίων τάσεων $\Delta\sigma_1$ και $\Delta\sigma_3$ από την πρόσθετη κυκλική επιφόρτιση . Όμως , οι διευθύνσεις των αντίστοιχων κυρίων επιπέδων δεν είναι γνωστές . Ειδικότερα για κάθε φόρτιση ισχύει :

✓ **Φόρτιση από συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο , P**



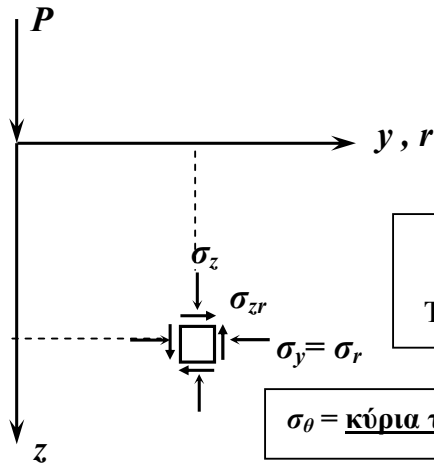
Συγκεντρωμένο Φορτίο P & Ορθές Τάσεις σε εδαφικό στοιχείο



Ισχύει σε κάθε θέση :

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad R^2 = r^2 + z^2$$

Επομένως , η τάση σ_θ είναι κύρια τάση .



Συγκεντρωμένο Φορτίο P & Τάσεις σε εδαφικό στοιχείο στο επίπεδο yz

$\sigma_\theta =$ κύρια τάση

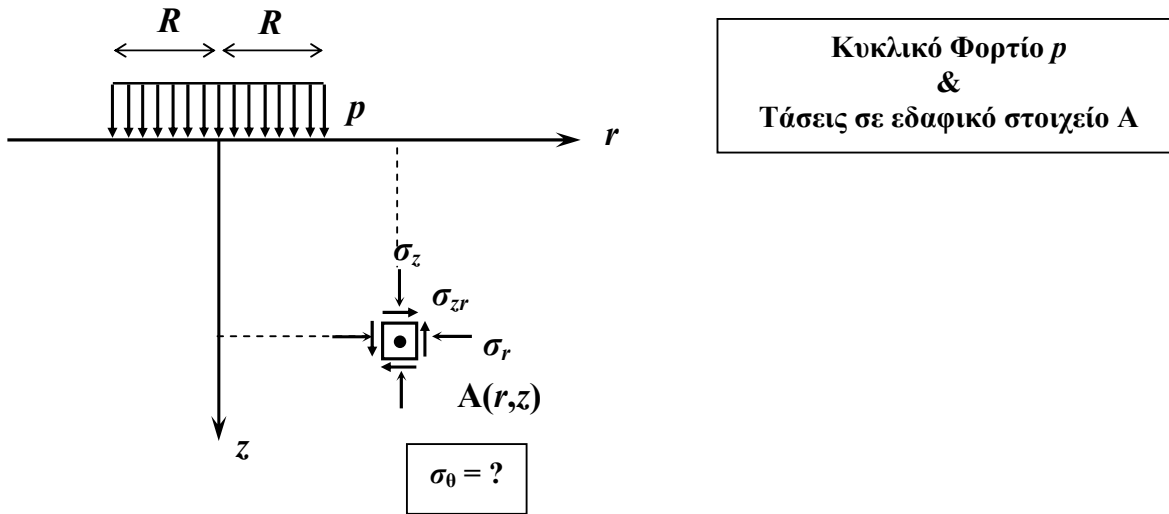
Οι κατανομές των τάσεων δίνονται από τις σχέσεις :

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{R^5}, \quad \sigma_r = \frac{P}{2\pi R^2} \cdot \left[\frac{3r^2 z}{R^3} - \frac{(1-2\nu) \cdot R}{R+z} \right], \quad \sigma_\theta = -\frac{(1-2\nu) \cdot P}{2\pi R^2} \cdot \left[\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right], \quad \sigma_{rz} = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{rz^2}{R^5}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ !!!

Η κατακόρυφη τάση σ_z είναι ανεξάρτητη των ελαστικών σταθερών E , ν του ημίχωρου .

- ✓ Φόρτιση από ομοιόμορφη ορθή πίεση , p , σε κυκλική επιφάνεια



Για το τυχαίο εδαφικό στοιχείο A οι κατανομές των κυρίων τάσεων $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_3$ καθώς και της κατακόρυφης τάσης $\Delta\sigma_z$ προκύπτουν από τα επόμενα αδιάστατα διαγράμματα , ως προς τις παραμέτρους γεωμετρίας r/R , z/R όπου R : η ακτίνα του κυκλικού πεδίου . Ειδικότερα ισχύει :

$$\frac{\Delta\sigma_z}{p} = f_1(r/R, z/R)$$

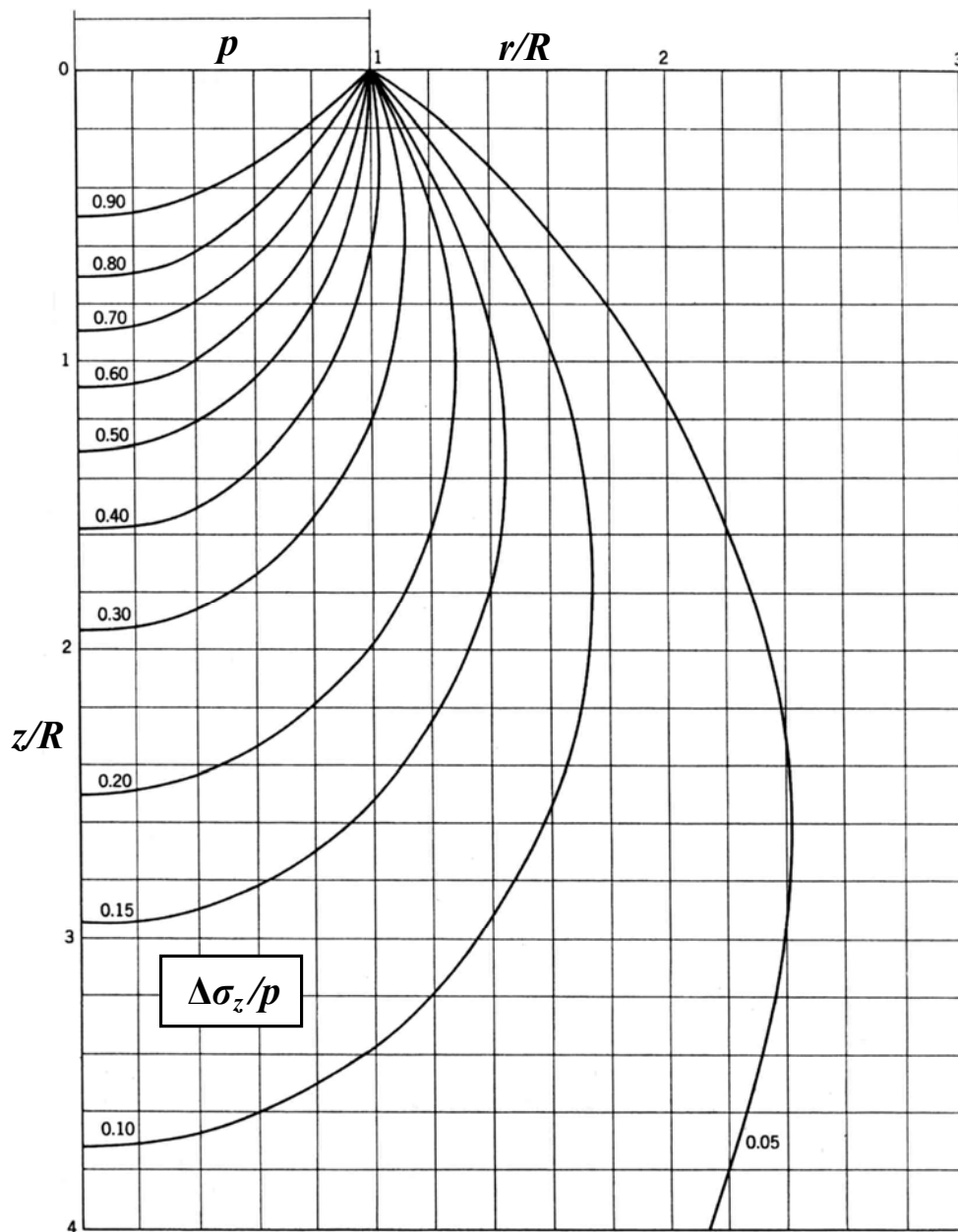
$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta\sigma_1}{p} &= f_2(r/R, z/R) \\ \frac{\Delta\sigma_3}{p} &= f_3(r/R, z/R) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Οι κύριες διευθύνσεις των τάσεων εξακολουθούν να μένουν άγνωστες.}$$

Στον άξονα του κυκλικού φορτίου ισχύει : $\sigma_r = \sigma_\theta$. Η κατανομή της σ_z κατά μήκος του άξονα z , δηλαδή για $r = 0$, δίνεται από την σχέση :

$$\Delta\sigma_z = p \cdot \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}$$

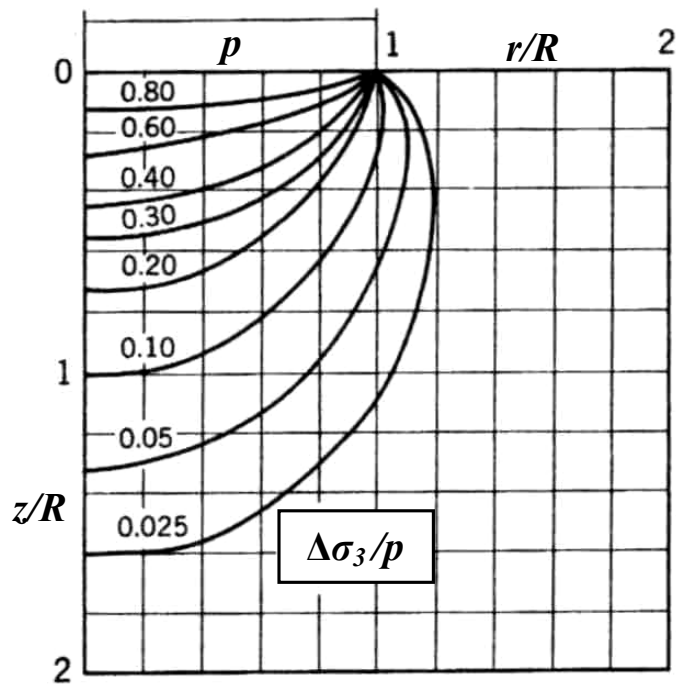
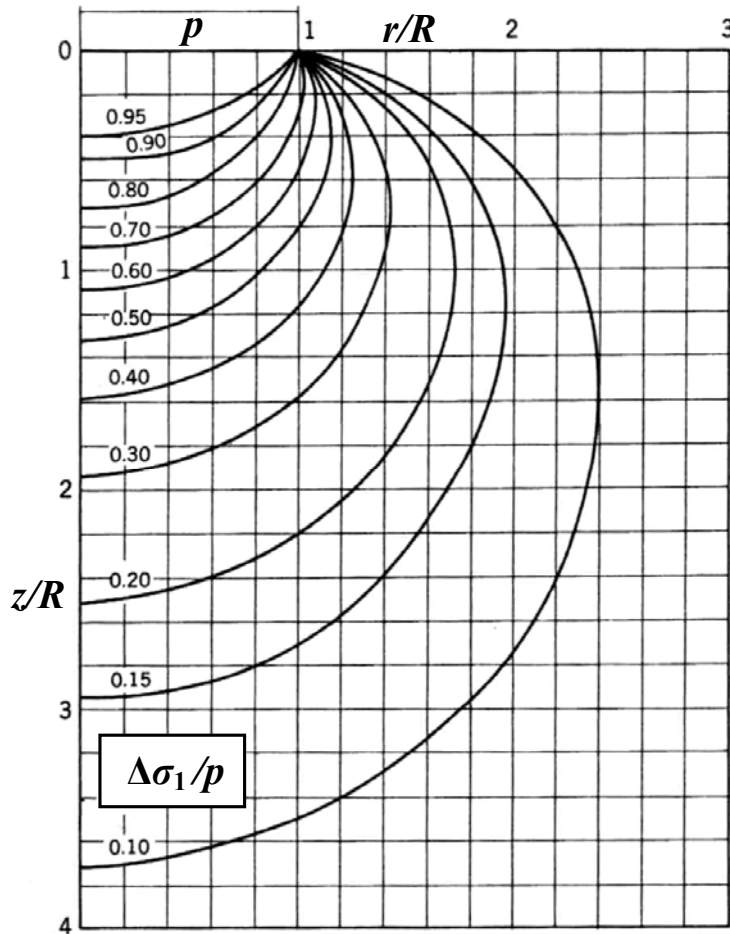
Και σε αυτήν την περίπτωση ισχύει η παρατήρηση της φόρτισης με σημειακό φορτίο P.

Ακολουθούν τα αδιάστατα διαγράμματα για την κατανομή των τάσεων στην φόρτιση με ορθή πίεση σε κυκλική επιφάνεια .



Κατανομή της κατακόρυφης τάσης $\Delta\sigma_z$ με το βάθος z

[Διάγραμμα (α)]

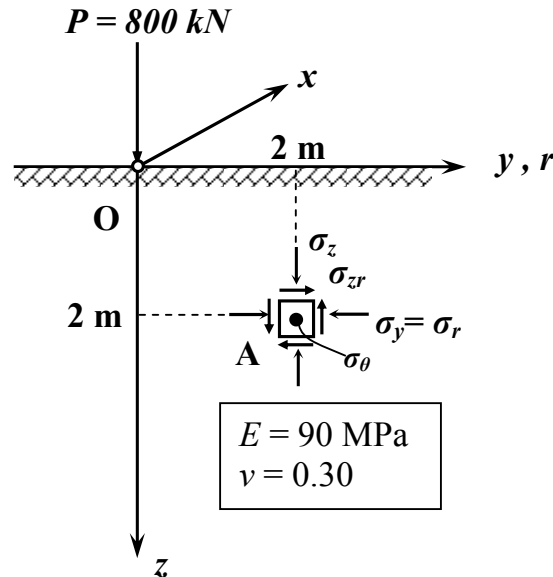


Κατανομή των κυρίων τάσεων $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_3$ με το βάθος z

[Διαγράμματα (β) και (γ)]

ΑΣΚΗΣΗ 7.1 – Απάντηση

(α) Ζητείται να προσδιορισθούν οι τάσεις σ_x , σ_y , σ_z και σ_{xy} για το σημείο A ($x_A = 0$, $y_A = z_A = 2$ m) για την φόρτιση του παρακάτω σχήματος .



Για τον υπολογισμό των τάσεων στο σημείο A , θα πρέπει να προσδιοριστούν οι γεωστατικές τάσεις καθώς και οι επιπρόσθετες τάσεις από την φόρτιση του συγκεντρωμένου φορτίου P . Η επαλληλία των δύο καταστάσεων δίνει και το ζητούμενο αποτέλεσμα . Τονίζεται ότι είναι επιτρεπτή η χρήση της επαλληλίας των δυο καταστάσεων μιας και χρησιμοποιείται η θεωρία της Γραμμικής Ισότροπης Ελαστικότητας (Γ.Ι.Ε.) .

Με σκοπό τον υπολογισμό των γεωστατικών τάσεων θεωρείται ότι το έδαφος έχει ένα τυπικό ειδικό βάρος $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$. Γίνεται η υπόθεση ότι ο Υδροφόρος Ορίζοντας είναι σε μεγάλο βάθος . Ο συντελεστής οριζοντίων ωθήσεων με παρεμπόδιση της πλευρικής παραμόρφωσης δίνεται από την σχέση :

$$K_o = \frac{\nu}{1 - \nu} = \frac{0.30}{1 - 0.30} \Rightarrow \underline{K_o = 0.429}$$

Υπολογισμός γεωστατικών τάσεων στο σημείο A:

- Ολική κατακόρυφη τάση : $\sigma_v = \gamma \cdot z_A = 18 \cdot 2.0 \Rightarrow \underline{\sigma_v = \sigma_z = 36.00 \text{ kPa}}$
- Ενεργός κατακόρυφη τάση : $u = 0 \rightarrow \underline{\sigma_v' = \sigma_z' = \sigma_z - u = 36.00 \text{ kPa}}$
- Ενεργός οριζόντια τάση : $\sigma_h' = \sigma_y' = K_o \sigma_z' = 0.429 \cdot 36 \Rightarrow \underline{\sigma_h' = \sigma_y' = 15.43 \text{ kPa}}$

- Ολική οριζόντια τάση : $\sigma_h = \sigma_y = \sigma_y' + u = 15.43 \text{ kPa}$

Στην γεωστατική κατάσταση δεν αναπτύσσονται καθόλου διατμητικές τάσεις .

Σχετικά με τις επιπρόσθετες τάσεις που προκύπτουν από το συγκεντρωμένο φορτίο P χρησιμοποιούνται οι αναλυτικοί τύποι που παρατέθηκαν προηγουμένως . Με βάση και το παραπάνω σχήμα της άσκησης ισχύουν τα εξής :

$$r = y_A = 2.00 \text{ m} , z = z_A = 2.00 \text{ m}$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{2.00^2 + 2.00^2} \Rightarrow \underline{R = 2.83 \text{ m}}$$

Άρα προκύπτει :

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{R^5} = \frac{3 \cdot 800}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2.00^3}{2.83^5} \Rightarrow \underline{\Delta\sigma_z = 16.83 \text{ kPa}}$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r = \Delta\sigma_y &= \frac{P}{2\pi R^2} \cdot \left[\frac{3r^2 z}{R^3} - \frac{(1-2\nu) \cdot R}{R+z} \right] = \\ &= \frac{800}{2 \cdot \pi \cdot 2.83^2} \cdot \left[\frac{3 \cdot 2.00^2 \cdot 2.00}{2.83^3} - \frac{(1-2 \cdot 0.30) \cdot 2.83}{2.83 + 2.00} \right] \Rightarrow \underline{\Delta\sigma_y = 13.11 \text{ kPa}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_\theta = \Delta\sigma_x &= -\frac{(1-2\nu) \cdot P}{2\pi R^2} \cdot \left[\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right] = \\ &= -\frac{(1-2 \cdot 0.30) \cdot 800}{2 \cdot \pi \cdot 2.83^2} \cdot \left[\frac{2.00}{2.83} - \frac{2.83}{2.83 + 2.00} \right] \Rightarrow \underline{\Delta\sigma_x = -0.77 \text{ kPa}} \end{aligned}$$

$$\Delta\sigma_{rz} = \Delta\sigma_{yz} = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{rz^2}{R^5} = \frac{3 \cdot 800}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2.00 \cdot 2.00^2}{2.83^5} \Rightarrow \underline{\Delta\sigma_{yz} = 16.83 \text{ kPa}}$$

Όλες οι άλλες διατμητικές τάσεις είναι μηδενικές .

Εφαρμόζοντας επαλληλία ανάμεσα στις δύο καταστάσεις προκύπτουν οι ζητούμενες τάσεις :

$$\sigma_{z,f} = \sigma_z + \Delta\sigma_z = 36.00 + 16.83 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{z,f} = 52.83 \text{ kPa}}}$$

$$\sigma_{y,f} = \sigma_y + \Delta\sigma_y = 15.43 + 13.11 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{y,f} = 28.54 \text{ kPa}}}$$

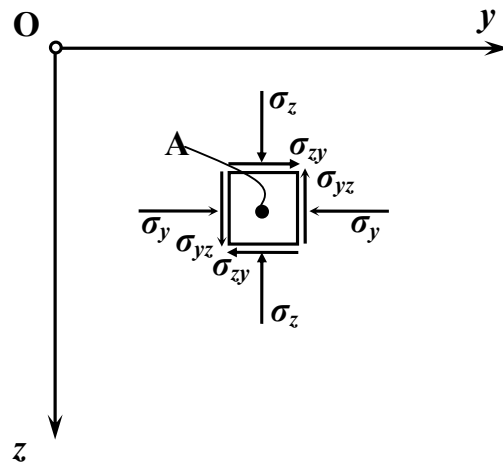
$$\sigma_{x,f} = \sigma_x + \Delta\sigma_x = 15.43 + (-0.77) \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{x,f} = 14.66 \text{ kPa}}}$$

$$\sigma_{yz,f} = \sigma_{yz} + \Delta\sigma_{yz} = 0.00 + 16.83 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{yz,f} = 16.83 \text{ kPa}}}$$

Τονίζεται ότι στο επίπεδο zy δεν αναπτύσσονται καθόλου διατμητικές τάσεις , με συνέπεια η ορθή τάση $\sigma_{x,f} = \sigma_{\theta,f}$ να είναι ταυτόχρονα και κύρια τάση στο επίπεδο αυτό .

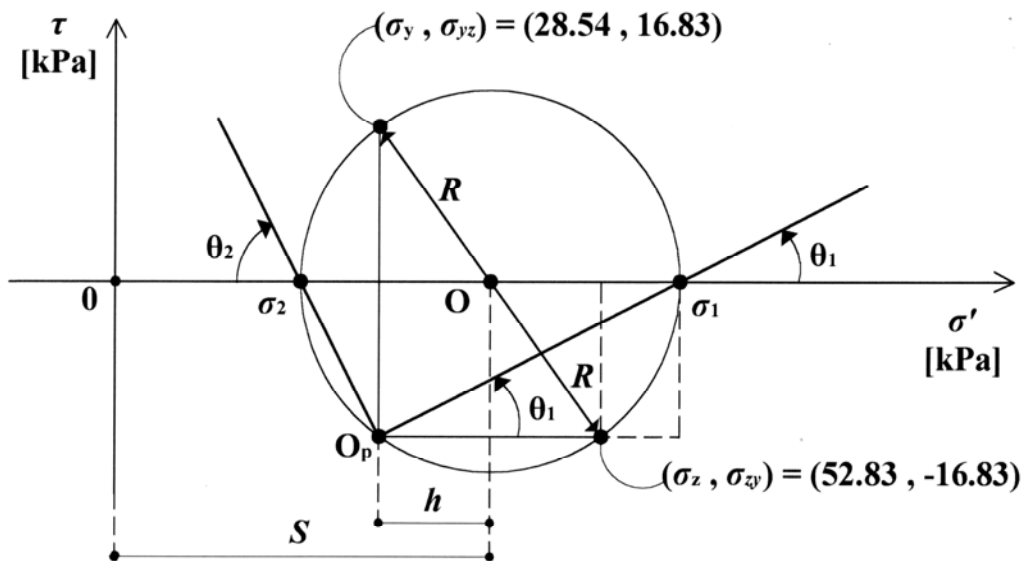
(β) Ζητούνται οι κύριες τάσεις σ_1 , σ_2 και σ_3 για το σημείο A, καθώς και οι αντίστοιχες διευθύνσεις τους. Επειδή η τάση $\sigma_{x,f} = \sigma_{\theta,f}$ είναι κύρια τάση, η μεταβολή με την διεύθυνση των σ , τ στο επίπεδο yz μπορεί να παρασταθεί με κύκλο Mohr. Δηλαδή οι άλλες δύο κύριες τάσεις μπορούν να προσδιορισθούν με στροφή του επιπέδου yz ως προς τον άξονα x.

Η εντατική κατάσταση για το εδαφικό στοιχείο A στο επίπεδο yz εικονίζεται παρακάτω :



Οι τάσεις που ασκούνται στο εδαφικό στοιχείο είναι οι εξής (για λόγους απλότητας αγνοείται ο όρος f):

$$\sigma_z = 52.83 \text{ kPa}, \sigma_y = 28.54 \text{ kPa}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 16.83 \text{ kPa}$$



Στην συνέχεια σχεδιάζεται ο κύκλος του Mohr , έχοντας υπόψη την σύμβαση των θετικών τάσεων . Η τελευταία αναφέρει ότι θετικές ορθές τάσεις είναι οι θλιπτικές , και θετικές διατμητικές τάσεις είναι οι αριστερόστροφες . Επομένως , με βάση την εντατική κατάσταση του προηγούμενου σχήματος προσδιορίζονται τα 2 σημεία του κύκλου του Mohr :

$$A = (\sigma_z , \sigma_{zy}) = (52.83 , -16.83)$$

$$B = (\sigma_y , \sigma_{yz}) = (28.54 , 16.83)$$

Ενώνοντας τα δύο σημεία με μία γραμμή , μπορεί να προκύψει το κέντρο O του κύκλου του Mohr ως η τομή της με τον άξονα των ορθών τάσεων σ . Έχοντας προσδιορίσει το κέντρο O του κύκλου μπορεί να σχεδιασθεί ο κύκλος με ακτίνα $R = (OA) = (OB)$.

Σχετικά με τον προσδιορισμό του πόλου περιστροφής O_p του κύκλου του Mohr , από το σημείο A φέρνουμε παράλληλη ευθεία στο επίπεδο στο οποίο ασκείται η τάση σ_z , δηλαδή οριζόντια ευθεία . Ανάλογα από το σημείο B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στο επίπεδο στο οποίο ασκείται η τάση σ_y , δηλαδή κατακόρυφη ευθεία . Οι τομές των δύο ευθειών με τον κύκλο είναι ο πόλος περιστροφής O_p όπως εικονίζεται και στο προηγούμενο σχήμα .

Το κέντρο του κύκλου του Mohr O βρίσκεται σε απόσταση από την αρχή των αξόνων :

$$S = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = \frac{52.83 + 28.54}{2} \Rightarrow S = 40.69 \text{ kPa}$$

Στην συνέχεια προσδιορίζεται η απόσταση h :

$$h = S - \sigma_y = 40.69 - 28.54 \Rightarrow h = 12.15 \text{ kPa}$$

Επομένως , η ακτίνα του κύκλου του Mohr υπολογίζεται από την σχέση :

$$R = \sqrt{h^2 + \sigma_{zy}^2} = \sqrt{12.15^2 + 16.83^2} \Rightarrow R = 20.75 \text{ kPa}$$

Επομένως , οι κύριες τάσεις προκύπτουν από τις σχέσεις :

$$\sigma_1 = S + R = 40.69 + 20.75 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_1 = 61.44 \text{ kPa}}}$$

$$\sigma_2 = S - R = 40.69 - 20.75 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_2 = 19.94 \text{ kPa}}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ !!!

Είναι γνωστό ότι η τάση είναι τανυστικό μέγεθος , και συγκεκριμένα τανυστής δευτέρας τάξεως . Επομένως , ισχύουν όλοι οι νόμοι περί του μετασχηματισμού των τανυστών . Με βάση την πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων θα πρέπει να ισχύει :

$$I_1 = \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 , \text{ η οποία ισχύει για την συγκεκριμένη περίπτωση .}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί έναν έλεγχο στην διαδικασία υπολογισμού των πράξεων .

Επομένως , οι κύριες τάσεις στο εδαφικό στοιχείο Α είναι οι εξής ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) :

- $\sigma_3 = 14.66 \text{ kPa}$, με διεύθυνση αυτή του άξονα x
- $\sigma_1 = 61.44 \text{ kPa}$, με διεύθυνση (βλέπε γωνία θ_1 στο προηγούμενο σχήμα) :

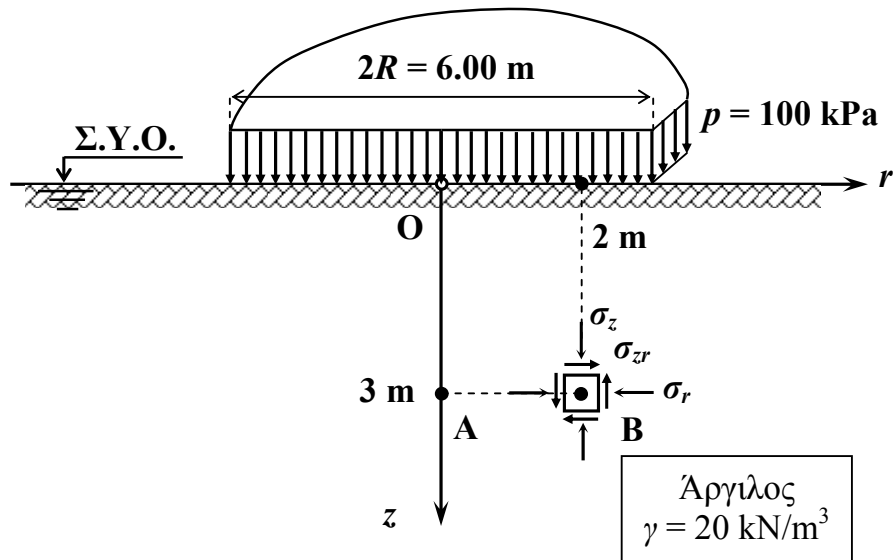
$$\tan \theta_1 = \frac{\sigma_{zy}}{R+h} = \frac{16.83}{20.75+12.15} \Rightarrow \underline{\theta_1 \cong 27^\circ}$$
 , ως προς το οριζόντιο επίπεδο

- $\sigma_2 = 19.94 \text{ kPa}$, με διεύθυνση (βλέπε γωνία θ_2 στο προηγούμενο σχήμα) :

$$\underline{\theta_2 = 90^\circ - \theta_1 = 63^\circ}$$
 , ως προς το οριζόντιο επίπεδο

ΑΣΚΗΣΗ 7.2 – Απάντηση

(α) Ζητείται να προσδιορισθούν οι κύριες τάσεις $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_3$ και οι αντίστοιχες διευθύνσεις τους στα σημεία Α ($r_A = 0$, $z_A = 3 \text{ m}$) και Β ($r_B = 2 \text{ m}$, $z_B = 3 \text{ m}$) , οι οποίες οφείλονται στο πρόσθετο φορτίο (p) της κυκλικής δεξαμενής του παρακάτω σχήματος .



- Υπολογισμός Τάσεων στο σημείο Α

Το σημείο Α βρίσκεται στον άξονα της ομοιόμορφης ορθής κυκλικής πίεσης p . Γενικά για κάθε σημείο πάνω στον άξονα z της κυκλικής φόρτισης , λόγω της συμμετρίας ως προς τον ίδιο άξονα , οι διατμητικές τάσεις σ_{zr} είναι μηδενικές . Δηλαδή ισχύει : $\sigma_{zr} = 0$. Επομένως , με την απουσία των διατμητικών τάσεων , οι ορθές τάσεις σ_z και σ_r είναι κύριες τάσεις . Οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη .

Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα εφαρμόζονται και στην παρούσα άσκηση για το σημείο Α .

Για το σημείο Α ισχύουν τα ακόλουθα :

$$r_A = 0, R = 3.00 \text{ m}, z_A = 3.00 \text{ m}$$

Επομένως, προκύπτει :

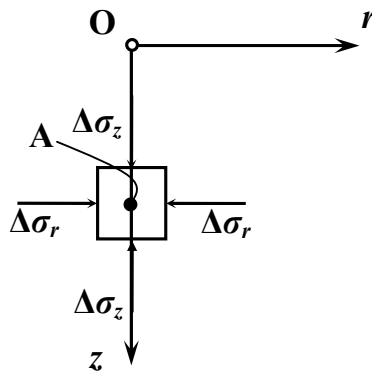
$$\frac{r_A}{R} = 0 \text{ και } \frac{z_A}{R} = 1$$

Από τα διαγράμματα (β) και (γ) προκύπτει για τις παραπάνω τιμές :

Διάγραμμα (β) : $\frac{\Delta\sigma_1}{p} = 0.645 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_z = 64.50 \text{ kPa}}}$, με κύρια διεύθυνση την κατακόρυφη .

Διάγραμμα (γ) : $\frac{\Delta\sigma_3}{p} = 0.10 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta\sigma_3 = \Delta\sigma_r = 10.00 \text{ kPa}}}$, με κύρια διεύθυνση την οριζόντια .

Συνοπτικά η εντατική κατάσταση στο σημείο Α είναι η παρακάτω :



Οι τάσεις που ασκούνται στο εδαφικό στοιχείο είναι οι εξής :

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_z = 64.50 \text{ kPa}, \Delta\sigma_3 = \Delta\sigma_r = 10.00 \text{ kPa}$$

• Υπολογισμός Τάσεων στο σημείο Β

Το σημείο Β δεν βρίσκεται στον άξονα της ομοιόμορφης ορθής κυκλικής πίεσης p και επομένως οι παρατηρήσεις που έγιναν για το σημείο Α δεν εφαρμόζονται .

Για το σημείο Β ισχύουν τα ακόλουθα :

$$r_B = 2.00 \text{ m}, R = 3.00 \text{ m}, z_B = 3.00 \text{ m}$$

Επομένως, προκύπτει :

$$\frac{r_B}{R} = 0.67 \text{ και } \frac{z_B}{R} = 1$$

Από τα διαγράμματα (β) και (γ) προκύπτει για τις παραπάνω τιμές :

$$\text{Διάγραμμα (β)} : \frac{\Delta\sigma_1}{p} \cong 0.55 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta\sigma_1 = 55.00 \text{ kPa}}}$$

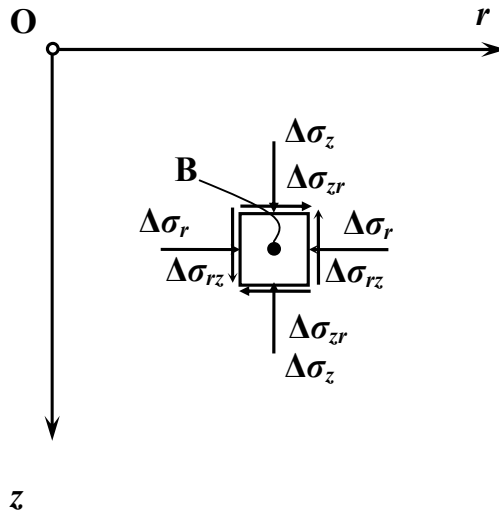
$$\text{Διάγραμμα (γ)} : \frac{\Delta\sigma_3}{p} \cong 0.07 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta\sigma_3 = 7.00 \text{ kPa}}}$$

Οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων $\Delta\sigma_1$ και $\Delta\sigma_3$ εξακολουθούν να παραμένουν άγνωστες .

Στην συνέχεια , μέσω του διαγράμματος (α) , προσδιορίζεται η κατακόρυφη τάση $\Delta\sigma_z$ στο σημείο B που αντιστοιχεί στην κυκλική φόρτιση (p) . Τονίζεται ότι στο σημείο B δεν μπορούν να προσδιορισθούν άμεσα η οριζόντια και οι διατμητικές τάσεις . Έμμεσος προσδιορισμός μπορεί να γίνει μέσω του κύκλου του Mohr .

$$\text{Διάγραμμα (α)} : \frac{\Delta\sigma_z}{p} \cong 0.50 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta\sigma_z = 50.00 \text{ kPa}}}$$

Συνοπτικά η εντατική κατάσταση στο σημείο B είναι η παρακάτω (ποιοτική απεικόνιση τάσεων στο εδαφικό στοιχείο B) :



Ο προσδιορισμός των κατευθύνσεων των κυρίων τάσεων μπορεί να γίνει μέσω του κύκλου του Mohr . Πράγματι , σχεδιάζεται ο κύκλος του Mohr , έχοντας υπόψη την σύμβαση των θετικών τάσεων . Η τελευταία αναφέρει ότι θετικές ορθές τάσεις είναι οι θλιπτικές , και θετικές διατμητικές τάσεις είναι οι αριστερόστροφες . Επομένως , με βάση την εντατική κατάσταση των κυρίων τάσεων, όπως αυτές προσδιορίστηκαν προηγουμένως , προσδιορίζονται τα 2 αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου του Mohr :

$$A = (\Delta\sigma_1, 0) = (55.00, 0)$$

$$B = (\Delta\sigma_3, 0) = (7, 0)$$

Το κέντρο O του κύκλου του Mohr προκύπτει ως το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος (AB) . Έχοντας προσδιορίσει το κέντρο O του κύκλου μπορεί να σχεδιασθεί ο κύκλος με ακτίνα $R = (OA) = (OB)$. Ο κύκλος του Mohr φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Επίσης, το σημείο Γ με συντεταγμένες $(\Delta\sigma_z, \Delta\tau)$ αντιστοιχεί στην εντατική κατάσταση του εδαφικού στοιχείου B στο οριζόντιο επίπεδο. Η κατακόρυφη τάση $\Delta\sigma_z$ προσδιορίστηκε προηγουμένως μαζί με τις κύριες τάσεις, ενώ η διατμητική τάση $\Delta\tau$ παραμένει άγνωστη. Η φορά της $\Delta\tau$ αναμένεται να είναι θετική (γιατί?).

Σχετικά με τον προσδιορισμό του πόλου περιστροφής O_p του κύκλου του Mohr, από το σημείο Γ φέρνουμε παράλληλη ευθεία στο επίπεδο στο οποίο ασκείται η τάση $\Delta\sigma_z$, δηλαδή οριζόντια ευθεία. Η τομή της οριζόντιας ευθείας με τον κύκλο είναι ο πόλος περιστροφής O_p όπως εικονίζεται στο επόμενο σχήμα.

Το κέντρο του κύκλου του Mohr O βρίσκεται σε απόσταση από την αρχή των αξόνων :

$$S = \frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_3}{2} = \frac{55.00 + 7.00}{2} \Rightarrow \underline{S = 31.00 \text{ kPa}}$$

Επομένως, η ακτίνα του κύκλου του Mohr υπολογίζεται από την σχέση :

$$R = S - \Delta\sigma_3 = 31.00 - 7.00 \Rightarrow \underline{R = 24.00 \text{ kPa}}$$

Στην συνέχεια προσδιορίζεται η απόσταση h :

$$h = \Delta\sigma_z - S = 50.00 - 31.00 \Rightarrow \underline{h = 19.00 \text{ kPa}}$$

Από το σχήμα προκύπτει :

$$\cos\theta = \frac{h}{R} = \frac{19}{24} \Rightarrow \underline{\theta = 37.66^\circ}, \text{ όπου } \theta : \text{ η επίκεντρη γωνία της παρούσας κατάστασης ως προς το}$$

οριζόντιο επίπεδο. Προφανώς από την ιδιότητα του κύκλου του Mohr ισχύει $2\theta_1 = \theta$, όπου θ_1 : η αντίστοιχη περιγεγραμμένη γωνία, που δίνει και την διεύθυνση του κυρίου επιπέδου (δες σχήμα).

Πράγματι, ισχύει :

$$\sin\theta = \frac{\Delta\tau}{R} \Rightarrow \Delta\tau = R \cdot \sin\theta = 24 \cdot \sin 37.66^\circ \Rightarrow \underline{\Delta\tau = 14.66 \text{ kPa}}$$

$$\text{Άρα : } \tan\theta_1 = \frac{\Delta\tau}{R + h} = \frac{14.66}{24.00 + 19.00} \Rightarrow \underline{\theta_1 = 18.83^\circ \approx 19^\circ} \{ = \theta/2 \}$$

Γενικά , η επιβολή εξωτερικού φορτίου σε ένα εδαφικό στοιχείο ισοδυναμεί με την επιβολή κυρίων τάσεων $\Delta\sigma_1$ και $\Delta\sigma_3$ στο τελευταίο . Στην περίπτωση των αστράγγιστων συνθηκών φόρτισης , όπου δεν επιτρέπεται η ελεύθερη στράγγιση του νερού των πόρων , αναπτύσσεται με την επιβολή του εξωτερικού φορτίου υπερπίεση πόρων . Αυτή αποτελεί και το ζητούμενο αυτού του ερωτήματος .

Στο προηγούμενο σχήμα φαίνεται το εξεταζόμενο εδαφικό στοιχείο στο οποίο επιβάλλονται υπό αστράγγιστες συνθήκες οι κύριες τάσεις $\Delta\sigma_1$ και $\Delta\sigma_3$. Αυτή η φόρτιση μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες φορτίσεις . Αυτές είναι οι εξής :

- Η πρώτη φόρτιση (α) αναφέρεται στην περίπτωση αστράγγιστης ισότροπης συμπίεσης με αύξηση της τάσης κατά $\Delta\sigma_3$. Σε αυτήν την περίπτωση η φόρτιση (α) δεν προκαλεί μεταβολή των ενεργών τάσεων , και για την αναπτυσσόμενη πίεση των πόρων ισχύει : $u_1 = \Delta\sigma_3$
- Η δεύτερη φόρτιση (β) αναφέρεται στην περίπτωση αστράγγιστης μονοαξονικής φόρτισης με αύξηση της αξονικής τάσης κατά $(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$ χωρίς μεταβολή της πλευρικής τάσης . Η φόρτιση (β) είναι μία συμβατική αστράγγιστη κυλινδρική τριαξονική φόρτιση , στην οποία η αναπτυσσόμενη υπερπίεση πόρων εξαρτάται από το μέγεθος της τάσης $(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$ και δίνεται από την σχέση : $u_2 = A \cdot (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$, όπου A παράμετρος της πίεσης πόρων της αργίλου , που προσδιορίζεται από κατάλληλη τριαξονική δοκιμή .

Επομένως , με επαλληλία των φορτίσεων (α) και (β) προκύπτει η τιμή της πίεσης των πόρων που αναπτύσσεται στο σημείο Α αμέσως μετά την επιβολή του φορτίου σύμφωνα με την σχέση :

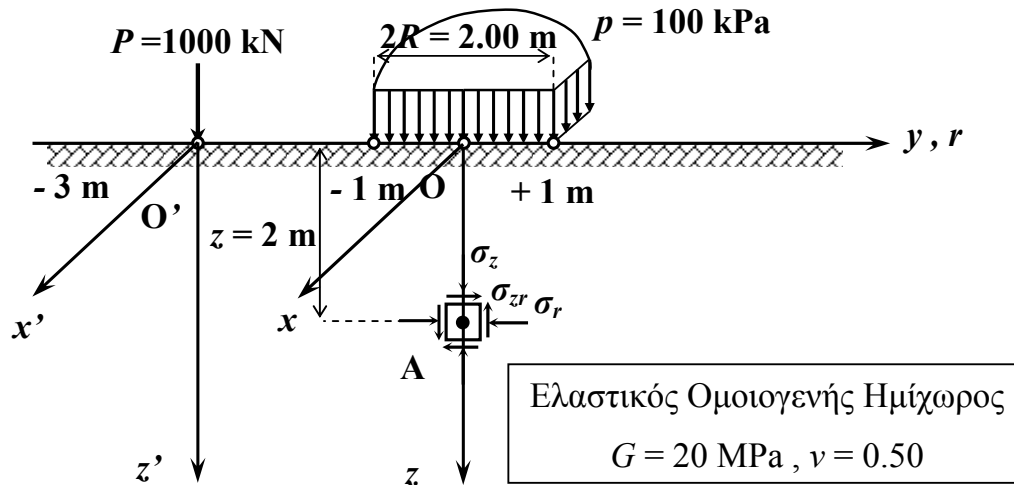
$$u = u_1 + u_2 \Rightarrow u = \Delta\sigma_3 + A \cdot (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση με αντικατάσταση προκύπτει το εξής :

$$u = 10.00 + 0.30 \cdot (64.50 - 10.00) \Rightarrow \underline{u = 26.35 \text{ kPa}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.3 – Απάντηση

(α) Ζητείται να προσδιορισθούν οι κύριες τάσεις $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ και οι αντίστοιχες διευθύνσεις τους στο σημείο A ($x_A = y_A = 0, z_A = 2 \text{ m}$).



• Υπολογισμός Τάσεων στο σημείο A

Για τον υπολογισμό των τάσεων στο σημείο A, θα πρέπει να προσδιοριστούν οι γεωστατικές τάσεις καθώς και οι επιπρόσθετες τάσεις που οφείλονται τόσο στην φόρτιση του συγκεντρωμένου φορτίου P , όσο και στην ομοιόμορφη ορθή κυκλική φόρτιση p . Η επαλληλία των τριών καταστάσεων δίνει και το ζητούμενο αποτέλεσμα. Τονίζεται ότι είναι επιτρεπτή η χρήση της επαλληλίας των παραπάνω καταστάσεων μιας και χρησιμοποιείται η θεωρία της Γραμμικής Ισότροπης Ελαστικότητας (Γ.Ι.Ε.).

Με σκοπό τον υπολογισμό των γεωστατικών τάσεων θεωρείται ότι το έδαφος έχει ένα τυπικό ειδικό βάρος $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$. Επίσης, γίνεται η υπόθεση ότι ο Υδροφόρος Ορίζοντας είναι σε μεγάλο βάθος. Ο συντελεστής οριζοντίων ωθήσεων K_0 με παρεμπόδιση της πλευρικής παραμόρφωσης θεωρείται ότι έχει τιμή ίση με 0.60.

Υπολογισμός γεωστατικών τάσεων στο σημείο A:

- Ολική κατακόρυφη τάση : $\sigma_v = \gamma \cdot z_A = 18 \cdot 2.0 \Rightarrow \underline{\sigma_v = \sigma_z = 36.00 \text{ kPa}}$
- Ενεργός κατακόρυφη τάση : $u = 0 \rightarrow \underline{\sigma_v' = \sigma_z' = \sigma_z - u = 36.00 \text{ kPa}}$
- Ενεργός οριζόντια τάση : $\sigma_h' = \sigma_y' = K_0 \sigma_z' = 0.60 \cdot 36 \Rightarrow \underline{\sigma_h' = \sigma_y' = 21.60 \text{ kPa}}$

- Ολική οριζόντια τάση : $\sigma_h = \sigma_y = \sigma_y' + u = 21.60 \text{ kPa}$

Στην γεωστατική κατάσταση δεν αναπτύσσονται καθόλου διατμητικές τάσεις .

Υπολογισμός τάσεων στο σημείο Α από την κυκλική φόρτιση :

Το σημείο Α βρίσκεται στον άξονα της ομοιόμορφης ορθής κυκλικής πίεσης p . Γενικά για κάθε σημείο πάνω στον άξονα z της κυκλικής φόρτισης , λόγω της συμμετρίας ως προς τον ίδιο άξονα , οι διατμητικές τάσεις $\Delta\sigma_{zr}^1$ είναι μηδενικές . Δηλαδή ισχύει : $\Delta\sigma_{zr}^1 = 0$. Επομένως , με την απουσία των διατμητικών τάσεων , οι ορθές τάσεις $\Delta\sigma_z^1$ και $\Delta\sigma_r^1$, που οφείλονται στην κυκλική φόρτιση , είναι **κύριες τάσεις** . Οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη .

Για το σημείο Α ισχύουν τα ακόλουθα :

$$r_A = y_A = 0 , R = 1.00 \text{ m} , z_A = 2.00 \text{ m}$$

Επομένως , προκύπτει :

$$\frac{r_A}{R} = 0 \text{ και } \frac{z_A}{R} = 2$$

Από τα διαγράμματα (β) και (γ) προκύπτει για τις παραπάνω τιμές :

$$\text{Διάγραμμα (β)} : \frac{\Delta\sigma_1^1}{p} = 0.28 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta\sigma_1^1 = \Delta\sigma_z^1 = 28.45 \text{ kPa}}} , \text{ με κύρια διεύθυνση την κατακόρυφη .}$$

$$\text{Διάγραμμα (γ)} : \frac{\Delta\sigma_3^1}{p} \cong 0.01 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta\sigma_3^1 = \Delta\sigma_y^1 \cong 0 \text{ kPa}}} , \text{ με κύρια διεύθυνση την οριζόντια .}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ !!!

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η επιρροή του κυκλικού φορτίου στις οριζόντιες τάσεις πρακτικά μηδενίζεται σε βάθος $z = 2R$ στον άξονα της φόρτισης .

Υπολογισμός τάσεων στο σημείο Α από το συγκεντρωμένο φορτίο :

Σχετικά με τις επιπρόσθετες τάσεις που προκύπτουν από το συγκεντρωμένο φορτίο P χρησιμοποιούνται οι αναλυτικοί τύποι . Για τον υπολογισμό των τάσεων από το συγκεντρωμένο φορτίο χρησιμοποιείται το σύστημα συντεταγμένων $x'z'y$, με αρχή το O' . Με βάση το παραπάνω σχήμα της άσκησης ισχύουν τα εξής :

$$r = y_A = 3.00 \text{ m} , z = z_A = 2.00 \text{ m}$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{3.00^2 + 2.00^2} \Rightarrow \underline{\underline{R = 3.61 \text{ m}}}$$

Άρα προκύπτει :

$$\Delta\sigma_z^2 = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{R^5} = \frac{3 \cdot 1000}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2.00^3}{3.61^5} \Rightarrow \underline{\Delta\sigma_z^2 = 6.27 \text{ kPa}}$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r^2 = \Delta\sigma_y^2 &= \frac{P}{2\pi R^2} \cdot \left[\frac{3r^2 z}{R^3} - \frac{(1-2\nu) \cdot R}{R+z} \right] = \\ &= \frac{1000}{2 \cdot \pi \cdot 3.61^2} \cdot \left[\frac{3 \cdot 3.00^2 \cdot 2.00}{3.61^3} - \frac{(1-2 \cdot 0.50) \cdot 3.61}{3.61+2.00} \right] \Rightarrow \underline{\Delta\sigma_y^2 = 14.02 \text{ kPa}} \end{aligned}$$

$$\Delta\sigma_\theta^2 = \Delta\sigma_x^2 = -\frac{(1-2\nu) \cdot P}{2\pi R^2} \cdot \left[\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right] \Rightarrow \underline{\Delta\sigma_x^2 = 0 \text{ kPa}}, \text{ για } \nu = 0.50.$$

$$\Delta\sigma_{rz}^2 = \Delta\sigma_{yz}^2 = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{rz^2}{R^5} = \frac{3 \cdot 1000}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{3.00 \cdot 2.00^2}{3.61^5} \Rightarrow \underline{\Delta\sigma_{yz}^2 = 9.35 \text{ kPa}}$$

Όλες οι άλλες διατμητικές τάσεις είναι μηδενικές .

Εφαρμόζοντας επαλληλία ανάμεσα στις παραπάνω καταστάσεις προκύπτουν οι ζητούμενες τάσεις:

$$\sigma_{z,f} = \sigma_z + \Delta\sigma_z^1 + \Delta\sigma_z^2 = 36.00 + 28.45 + 6.27 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{z,f} = 70.72 \text{ kPa}}}$$

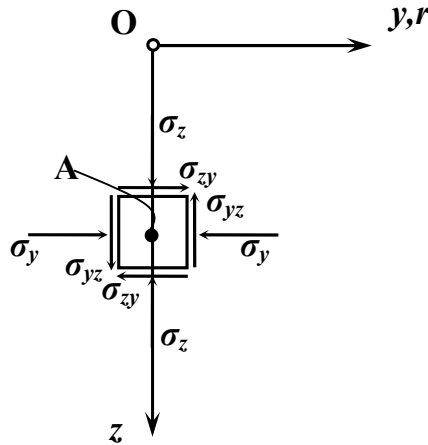
$$\sigma_{y,f} = \sigma_y + \Delta\sigma_y^1 + \Delta\sigma_y^2 = 21.60 + 0.00 + 14.02 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{y,f} = 35.62 \text{ kPa}}}$$

$$\sigma_{x,f} = \sigma_x + \Delta\sigma_x^1 + \Delta\sigma_x^2 = 21.60 + 0.00 + 0.00 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{x,f} = 21.60 \text{ kPa}}}$$

$$\sigma_{yz,f} = \sigma_{yz} + \Delta\sigma_{yz}^1 + \Delta\sigma_{yz}^2 = 0.00 + 0.00 + 9.35 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{yz,f} = 9.35 \text{ kPa}}}$$

Τονίζεται ότι στο επίπεδο zy δεν αναπτύσσονται καθόλου διατμητικές τάσεις , με συνέπεια η ορθή τάση $\sigma_{x,f} = \sigma_{\theta,f}$ να είναι ταυτόχρονα και **κύρια τάση** στο επίπεδο αυτό . Επομένως , η μεταβολή με την διεύθυνση των σ , τ στο επίπεδο yz μπορεί να παρασταθεί με κύκλο Mohr . Δηλαδή οι άλλες δύο κύριες τάσεις μπορούν να προσδιορισθούν με στροφή του επιπέδου yz ως προς τον άξονα x .

Η εντατική κατάσταση για το εδαφικό στοιχείο Α στο επίπεδο yz εικονίζεται παρακάτω :



Οι τάσεις που ασκούνται στο εδαφικό στοιχείο είναι οι εξής (για λόγους απλότητας αγνοείται ο όρος f) :

$$\sigma_z = 70.72 \text{ kPa} , \sigma_y = 35.62 \text{ kPa} , \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 9.35 \text{ kPa}$$

Στην συνέχεια σχεδιάζεται ο κύκλος του Mohr , έχοντας υπόψη την σύμβαση των θετικών τάσεων . Η τελευταία αναφέρει ότι θετικές ορθές τάσεις είναι οι θλιπτικές , και θετικές διατμητικές τάσεις είναι οι αριστερόστροφες . Επομένως , με βάση την εντατική κατάσταση του προηγούμενου σχήματος προσδιορίζονται τα 2 σημεία του κύκλου του Mohr :

$$A = (\sigma_z , \sigma_{zy}) = (70.72 , -9.35)$$

$$B = (\sigma_y , \sigma_{yz}) = (35.62 , 9.35)$$

Ενώνοντας τα δύο σημεία με μία γραμμή , μπορεί να προκύψει το κέντρο O του κύκλου του Mohr ως η τομή της με τον άξονα των ορθών τάσεων σ . Έχοντας προσδιορίσει το κέντρο O του κύκλου μπορεί να σχεδιασθεί ο κύκλος με ακτίνα $R = (OA) = (OB)$.

Σχετικά με τον προσδιορισμό του πόλου περιστροφής O_p του κύκλου του Mohr , από το σημείο A φέρνουμε παράλληλη ευθεία στο επίπεδο στο οποίο ασκείται η τάση σ_z , δηλαδή οριζόντια ευθεία . Ανάλογα από το σημείο B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στο επίπεδο στο οποίο ασκείται η τάση σ_y , δηλαδή κατακόρυφη ευθεία . Οι τομές των δύο ευθειών με τον κύκλο είναι ο πόλος περιστροφής O_p όπως εικονίζεται και στο επόμενο σχήμα .

Το κέντρο του κύκλου του Mohr O βρίσκεται σε απόσταση από την αρχή των αξόνων :

$$S = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = \frac{70.72 + 35.62}{2} \Rightarrow S = 53.17 \text{ kPa}$$

Η ακτίνα του κύκλου του Mohr υπολογίζεται από την σχέση :

$$R = \sqrt{(\sigma_z - S)^2 + \sigma_{yz}^2} = \sqrt{(70.72 - 53.17)^2 + 9.35^2} \Rightarrow R = 19.89 \text{ kPa}$$

Επομένως , οι κύριες τάσεις προκύπτουν από τις σχέσεις :

$$\sigma_1 = S + R = 53.17 + 19.89 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_1 = 73.06 \text{ kPa}}}$$

$$\sigma_2 = S - R = 53.17 - 19.89 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_2 = 33.28 \text{ kPa}}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ !!!

Ισχύει η παρατήρηση της προηγούμενης ασκήσεως για την σχέση :

$$I_1 = \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2$$

Επομένως , οι κύριες τάσεις στο εδαφικό στοιχείο Α είναι οι εξής ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) :

- $\sigma_3 = 21.60 \text{ kPa}$, με διεύθυνση αυτή του άξονα x
- $\sigma_1 = 73.06 \text{ kPa}$, με διεύθυνση :

Από το σχήμα προκύπτει :

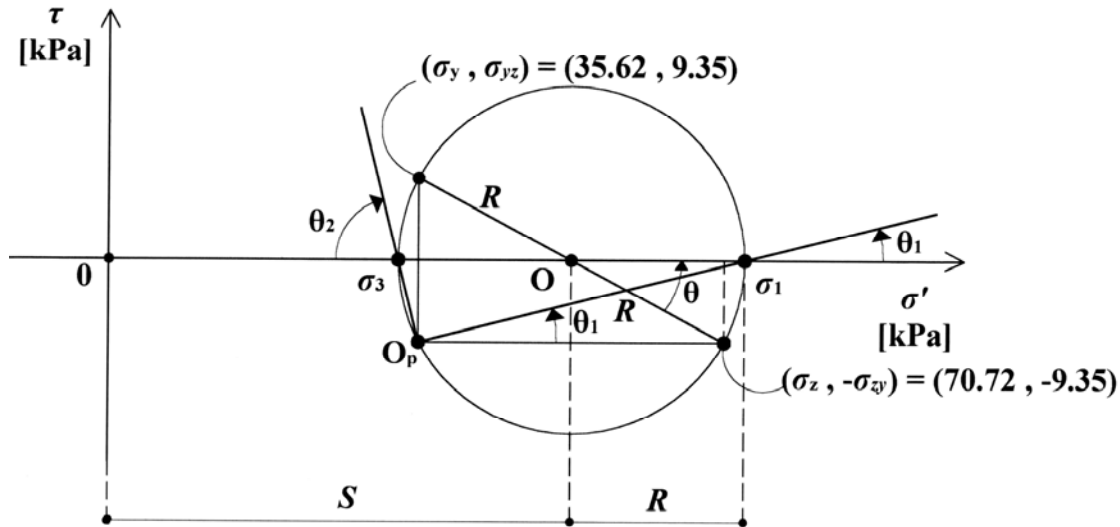
$$\tan\theta = \frac{\sigma_{yz}}{\sigma_z - S} = \frac{9.35}{70.72 - 53.17} \Rightarrow \theta = 28.05^\circ \cong 28^\circ , \text{ όπου } \theta : \text{ η επίκεντρη γωνία της παρούσας}$$

κατάστασης ως προς το οριζόντιο επίπεδο . Προφανώς από την ιδιότητα του κύκλου του Mohr ισχύει $2\theta_1 = \theta$, όπου θ_1 : η αντίστοιχη περιγεγραμμένη γωνία , που δίνει και την διεύθυνση του κυρίου επιπέδου (δες σχήμα).

$$\text{Άρα : } \theta_1 = \frac{\theta}{2} = 14.02^\circ \approx 14^\circ , \text{ ως προς το οριζόντιο επίπεδο}$$

- $\sigma_2 = 33.28 \text{ kPa}$, με διεύθυνση (βλέπε γωνία θ_2 στο επόμενο σχήμα) :

$$\underline{\underline{\theta_2 = 90^\circ - \theta_1 = 76^\circ}} , \text{ ως προς το οριζόντιο επίπεδο}$$



(β) Ζητείται να προσδιορισθεί η ανηγμένη ογκομετρική διόγκωση ε_{vol} .

Για την επίλυση του προβλήματος στο προηγούμενο ερώτημα χρησιμοποιείται η θεωρία της Γραμμικής Ισότροπης Ελαστικότητας (ΓΙΕ) , και το έδαφος προσομοιάζεται με ελαστικό ομοιογενή ημίχωρο με λόγο του Poisson $\nu = 0.50$. Η τελευταία τιμή υποδηλώνει ότι το έδαφος είναι ασυμπίεστο , δηλαδή μπορεί να παραμορφώνεται υπό κάποια φόρτιση , αλλά η συνολική ογκομετρική παραμόρφωση θα είναι μηδενική (μηδενική μεταβολή όγκου) .

Επομένως , ισχύει : $\underline{\varepsilon_{vol} = 0}$.

Σε περίπτωση που η παραπάνω παρατήρηση δεν γίνει αντιληπτή , μπορεί να γίνει ο υπολογισμός των κυρίων παραμορφώσεων σύμφωνα με τις σχέσεις της ελαστικότητας .

Το μέτρο ελαστικότητας E προκύπτει από την σχέση :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \Rightarrow E = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot G = 2 \cdot (1 + 0.50) \cdot 20 \Rightarrow \underline{E = 60 \text{ MPa}}$$

Οι κύριες παραμορφώσεις δίνονται από τις σχέσεις :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot \{ \sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \} = \frac{1}{60000} \cdot \{ 73.06 - 0.50 \cdot (33.28 + 21.60) \} \Rightarrow \underline{\varepsilon_1 = 0.000760}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot \{ \sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \} = \frac{1}{60000} \cdot \{ 33.28 - 0.50 \cdot (73.06 + 21.60) \} \Rightarrow \underline{\varepsilon_2 = -0.000234}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot \{ \sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \} = \frac{1}{60000} \cdot \{ 21.60 - 0.50 \cdot (73.06 + 33.28) \} \Rightarrow \underline{\varepsilon_3 = -0.000526}$$

Άρα , προκύπτει : $\varepsilon_{vol} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.000760 + (-0.000234) + (-0.000526) \Rightarrow \underline{\varepsilon_{vol} = 0}$

ΑΣΚΗΣΗ 7.4 – Απάντηση

Ζητείται να προσδιορισθεί η κατάλληλη θέση από τις δύο εναλλακτικές - προτεινόμενες για την κατασκευή σήραγγας υπονόμου . Η θέση Α αναφέρεται σε θέση κάτω από ομοιόμορφη ορθή κυκλική πίεση , ενώ η θέση Β αναφέρεται σε θέση κάτω από φόρτιση απειρομήκους λωρίδας .

Και στις δύο προτεινόμενες θέσεις , οι γεωστατικές συνθήκες είναι ίδιες . Επομένως , η καλύτερη λύση είναι αυτή που δίνει στο συγκεκριμένο βάθος z τις μικρότερες επιπρόσθετες τάσεις από την εξωτερική φόρτιση , ιδίως στην κατακόρυφη τάση σ_z μιας και αυτή αναλαμβάνει κατά κύριο λόγο την εξωτερική φόρτιση . Στα επόμενα γίνεται η υπόθεση ότι η ίδια η σήραγγα δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα των υπολογισμών , μιας και ζητείται ποιοτική επίλυση του προβλήματος .

• **ΘΕΣΗ Α**

Η κατακόρυφη επιπρόσθετη τάση στον άξονα της ομοιόμορφης κυκλικής φόρτισης δίνεται από την σχέση :

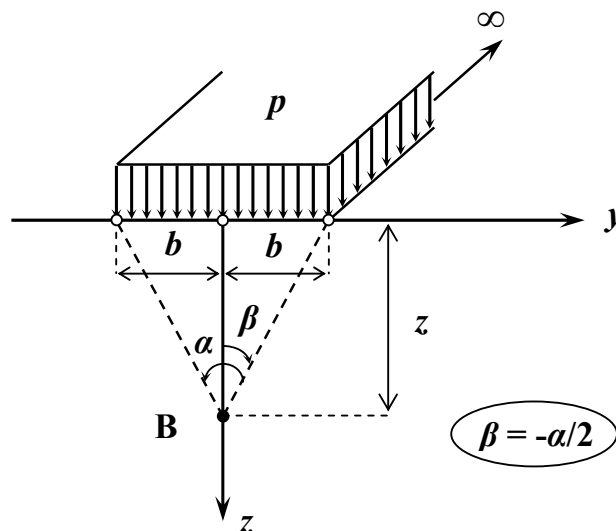
$$\Delta\sigma_z = p \cdot \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta\sigma_z}{p} = 1 - \left[1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right]^{-3/2} = 1 - \left[1 + \left(\frac{4}{15} \right)^2 \right]^{-3/2} \Rightarrow \frac{\Delta\sigma_z}{p} \cong \underline{\underline{10\%}}$$

• **ΘΕΣΗ Β**

Η κατακόρυφη επιπρόσθετη τάση στον άξονα της φόρτισης μορφής απειρομήκους λωρίδας δίνεται από την σχέση :

$$\Delta\sigma_z = p \cdot \left\{ \frac{a}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sin a \cdot \cos(a + 2\beta) \right\} \Rightarrow \frac{\Delta\sigma_z}{p} = \frac{a}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sin a \cdot \cos(a + 2\beta) , \text{ με γωνίες } \alpha , \beta \text{ όπως}$$

φαίνονται στο παρακάτω σχήμα .



Για σημεία πάνω στον άξονα z της απειρομήκουσ λωρίδας ισχύει : $\beta = -\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \underline{\alpha + 2\beta = 0}$

Επίσης , από το παραπάνω σχήμα ισχύει :

$$\tan \frac{a}{2} = \frac{b}{z} = \frac{4}{15} \Rightarrow \underline{\alpha \cong 30^\circ = 0.521 \text{ rad}}$$

Επομένως , προκύπτει :

$$\frac{\Delta\sigma_z}{\rho} = -\frac{a}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sin a = \frac{0.521}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sin(0.521 \text{ rad}) \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\Delta\sigma_z}{\rho} = 33\%}}$$

Επομένως , στην θέση Β με την φόρτιση μορφής απειρομήκουσ λωρίδας η επιπρόσθετη κατακόρυφη τάση είναι 3 φορές περίπου μεγαλύτερη από την αντίστοιχη επιπρόσθετη τάση στην περίπτωση της κυκλικής φόρτισης στην θέση Α . Αυτό το συμπέρασμα είναι ήδη γνωστό από το αντίστοιχο κεφάλαιο της θεωρίας στο βιβλίο του κ. Καββαδά .

Επομένως , η λύση που προκρίνεται για την κατασκευή σήραγγας υπονόμου είναι η θέση Α .