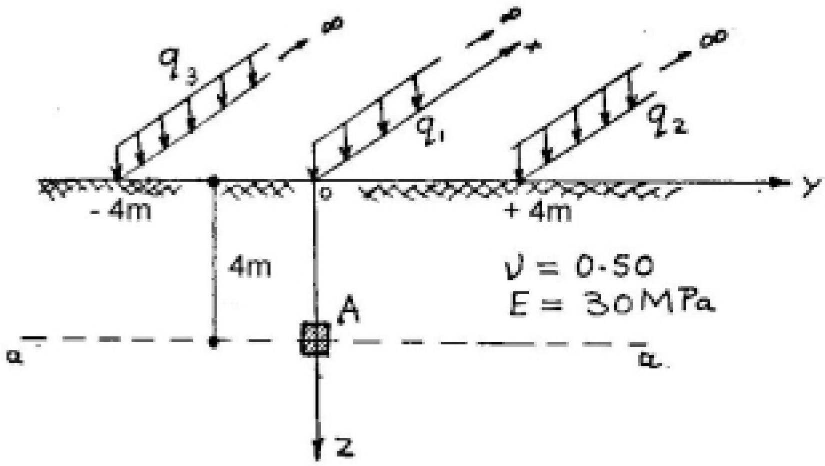
Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΕΔΑΦΟΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (5^{ο} Εξαμ. ΠΟΛ. ΜΗΧ)

4^{η} ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (Μετάδοση των τάσεων στο έδαφος)

1. Τρία απειρομήκη γραμμικά φορτία q_1 = 100 kN/m και q_2 = q_3 = 50 kN/m δρουν στην επιφάνεια ελαστικού ομοιογενούς ημιχώρου με λόγο Poisson ν = 0.50.



Να υπολογισθούν:

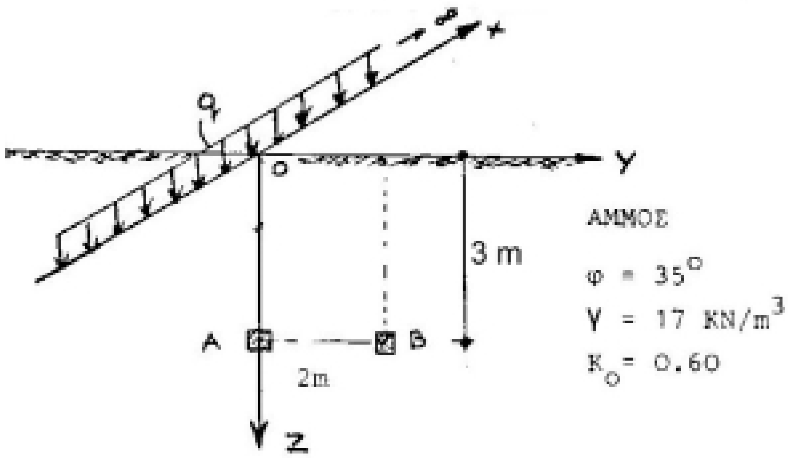
α) Οι τάσεις σ_x, σ_y, σ_z και τ_{yz} στο στοιχείο Α ($x_A = y_A = 0$, z_A = 4 m)

β) Η συνισταμένη των κατακορύφων τάσεων σ_z (ανά μέτρο μήκους κατά τη διεύθυνση x στο οριζόντιο επίπεδο α-α λόγω των φορτίων q_1, q_2, q_3.

γ) Οι (ανηγμένες) παραμορφώσεις ε_z, ε_x.

2. α) Για το γραμμικό φορτίο q = 250 kN/m του σχήματος, ζητείται να ελεγχθεί αν αστοχεί ή όχι το εδαφικό στοιχείο Α.

β) Για ποιά τιμή του φορτίου q θα αστοχήσει το εδαφικό στοιχείο Β ; Ποια είναι στην περίπτωση αυτή η διεύθυνση του επιπέδου αστοχίας ;

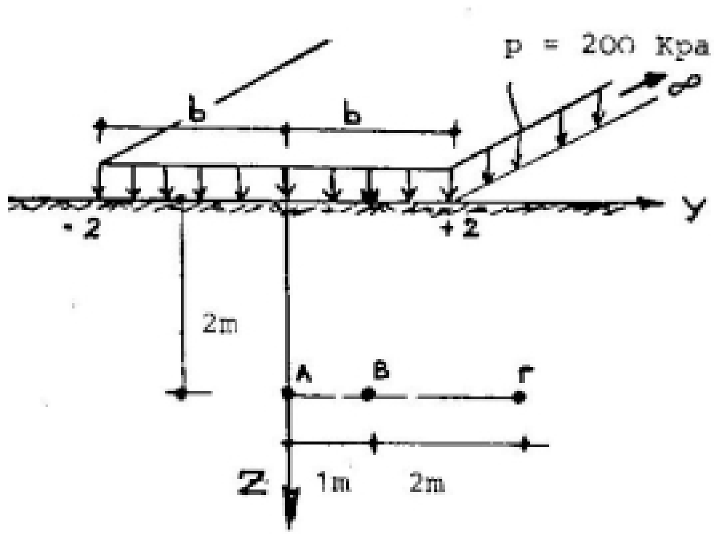


3. Για την απειρομήκη λωριδωτή φόρτιση του σχήματος ζητούνται :

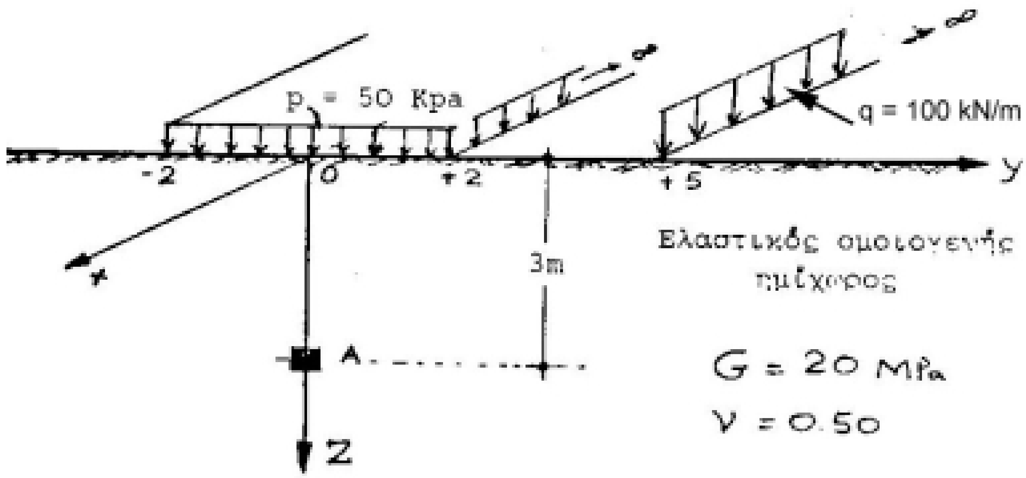
Οι τιμές και οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_3 στα σημεία :

Α ($y_A = 0$, $z_A = 2m$), Β ($y_B = 1m$, $z_B = 2m$) και Γ ($y_\Gamma = 3m$, $z_\Gamma = 2m$)

Το έδαφος θεωρείται ελαστικός ομοιογενής ημίχωρος με G = 100 MPa και ν = 0.35.

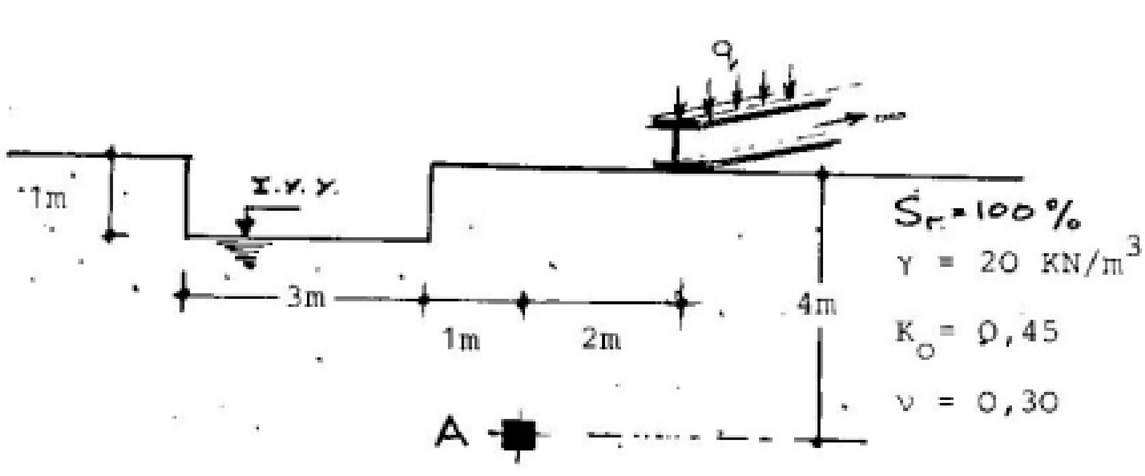


4. Για το εδαφικό στοιχείο Α ($x_A = y_A = 0$, $z_A = 3m$) να προσδιορισθούν οι (ανηγμένες) παραμορφώσεις ε_z, ε_x, ε_y και



γ_{yz}.

5. Στο παρακάτω σχήμα, να προσδιορισθούν οι τιμές και οι διευθύνσεις των συνολικών τάσεων σ_1, σ_2 και σ_3 στο σημείο Α μετά την εκσκαφή της τάφρου και την επιβολή του γραμμικού φορτίου q = 120 kN/m.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 4ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

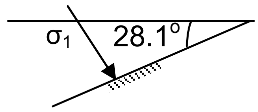
1. (α) $\sigma_x^A = 11.94kPa$, $\sigma_y^A = 3.98kPa$, $\sigma_z^A = 19.9kPa$, $\tau_{yz}^A = 0$

(β) 200kN

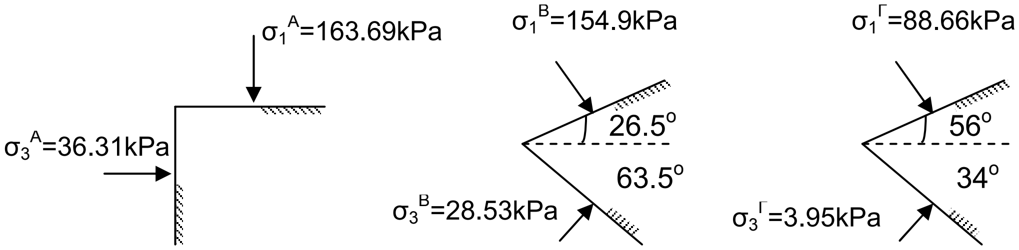
(γ) $\varepsilon_z = 3.98 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_x = 0$

2. (α) Δεν αστοχεί το εδαφικό στοιχείο Α

(β) q = 592.7 kPa

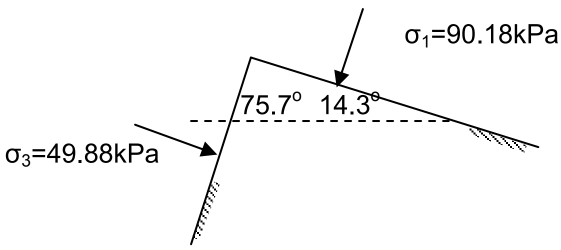


3.



4. $\varepsilon_z = 3.34 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_y = -3.34 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_x = 0$, $\gamma_{yz} = 1.24 \times 10^{-4}$

5.



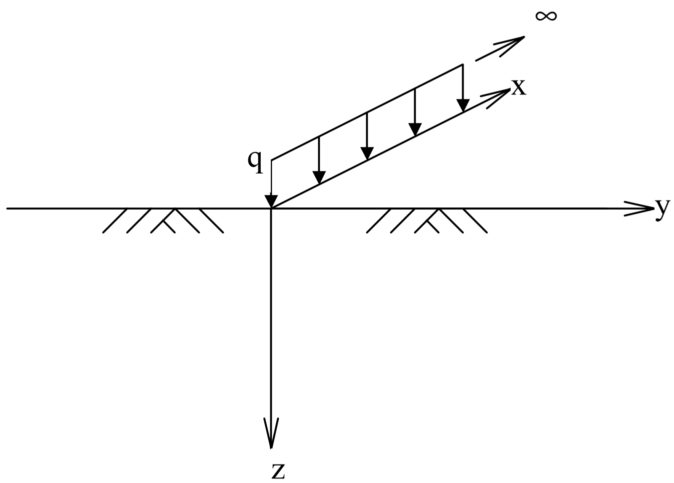
6η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΤΑΣΕΩΝ ΣΤΟ ΕΔΑΦΟΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ

Επιμέλεια: Γιώργος Μπελόκας, Υποψήφιος Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις που προκύπτουν από τη θεώρηση γραμμικής ισότροπης ελαστικότητας για ομοιογενή ελαστικό ημίχωρο. Συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί η επαλληλία των φορτίσεων.

Για το απειρόμηκες φορτίο φορτίο του παρακάτω σχήματος το επίπεδο των αξόνων xz αποτελεί επίπεδο συμμετρίας.



Συνεπώς ισχύουν: $u_{xx}=\varepsilon_{xx}=\sigma_{xy}=0$ και $\sigma_{xx}=\nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})$.

Οι ακόλουθες σχέσεις δίνουν τη **μεταβολή του τανυστή των τάσεων** $\Delta\sigma_{ij}$:

$$\Delta\sigma_{zz}=(2q/\pi)[(z^3)/(y^2+z^2)^2]$$

$$\Delta\sigma_{yy}=(2q/\pi)[(y^2z)/(y^2+z^2)^2]$$

$$\Delta\sigma_{yz}=(2q/\pi)[(yz^2)/(y^2+z^2)^2]$$

$$\Delta\sigma_{xx}=\nu(\Delta\sigma_{yy}+\Delta\sigma_{zz})$$

Παρατήρηση: όλες οι μεταβολές των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων είναι ανεξάρτητες του μέτρου ελαστικότητας Ε. Επίσης, όλες οι μεταβολές των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων εκτός της $\Delta\sigma_{xx}$ εξαρτώνται από γεωμετρικά στοιχεία μόνο.

Απαντήσεις ερωτήματα:

(α) q_1=100kN/m.

Είναι y=0m, z=0m ⇒

$\Delta\sigma_{zz,1}=[(200kN/m)/\pi]\{(4m)^3/[(0m)^2+(4m)^2]^2\}=15.92kPa$

$\Delta\sigma_{yy,1}=\Delta\sigma_{yz,1}=0kN/m$, λογικό αφού το xz αποτελεί επ΄πεδο συμμετρίας.

$\Delta\sigma_{xx,1}=0.5(0+15.92)=7.96kPa$

- q_2=50kN/m.

Προσοχή! Εισάγουμε μετατοπισμένο τοπικό σύστημα συντεταγμένων κατά το οποίο ο άξονας των χ συμπίπτει με το ίχνος του απειρομήκους φορτίου q_2. Οι συντεταγμένες του σημείου Α προσδιορίζονται σχετικά με αυτό το σύστημα συντεταγμένων:

Είναι y´=-4m, z´=4m ⇒

$$\Delta\sigma_{zz,2}=[(100kN/m)/\pi]\{(4m)^3/[(-4m)^2+(4m)^2]^2\}=1.99kPa$$

$$\Delta\sigma_{yy,2}=[(100kN/m)/\pi]\{[(-4m)^2(4m)]/[(-4m)^2+(4m)^2]^2\}=1.99kPa$$

$$\Delta\sigma_{yz,2}=[(100kN/m)/\pi]\{(-4m)(4m)^2/[(-4m)^2+(4m)^2]^2\}=-1.99kPa$$

$$\Delta\sigma_{xx,2}=0.5(1.99+1.99)=1.99kPa$$

- q_3=50kN/m.

Προσοχή! Εισάγουμε μετατοπισμένο τοπικό σύστημα συντεταγμένων κατά το οποίο ο άξονας των χ συμπίπτει με το ίχνος του απειρόμηκους φορτίου q_3. Οι συντεταγμένες του σημείου Α προσδιορίζονται σχετικά με αυτό το σύστημα συντεταγμένων:

Είναι y´´=4m, z´´=4m ⇒

$\Delta\sigma_{zz.3}=[(100kN/m)/\pi]\{(4m)^3/[(4m)^2+(4m)^2]^2\}=1.99kPa$

$\Delta\sigma_{yy,3}=[(100kN/m)/\pi]\{[(4m)^2(4m)]/[(4m)^2+(4m)^2]^2\}=1.99kPa$

$\Delta\sigma_{yz,3}=[(100kN/m)/\pi]\{(4m)(4m)^2/[(4m)^2+(4m)^2]^2\}=1.99kPa$

$\Delta\sigma_{xx,3}=0.5(1.99+1.99)=3.98kPa$

Η συνολική μεταβολή του τανυστή προκύπτει με εφαρμογή της επαλληλίας των φορτίσεων:

$\Delta\sigma_{zz}=\Sigma\Delta\sigma_{zz,i}=15.92+1.99+1.99=19.90kPa$

$\Delta\sigma_{yy}=\Sigma\Delta\sigma_{yy,i}=0+1.99+1.99=3.98kPa$

$\Delta\sigma_{yz}=\Sigma\Delta\sigma_{yz,i}=0+(-1.99)+1.99=0kPa$

$\Delta\sigma_{xx}=\Sigma\Delta\sigma_{xx,i}=7.96+1.99+1.99=11.94kPa$

Άρα οι τάσεις στο σημείο Α μετά την επιβολή των φορτίων q_1, q_2 και q_3 είναι:

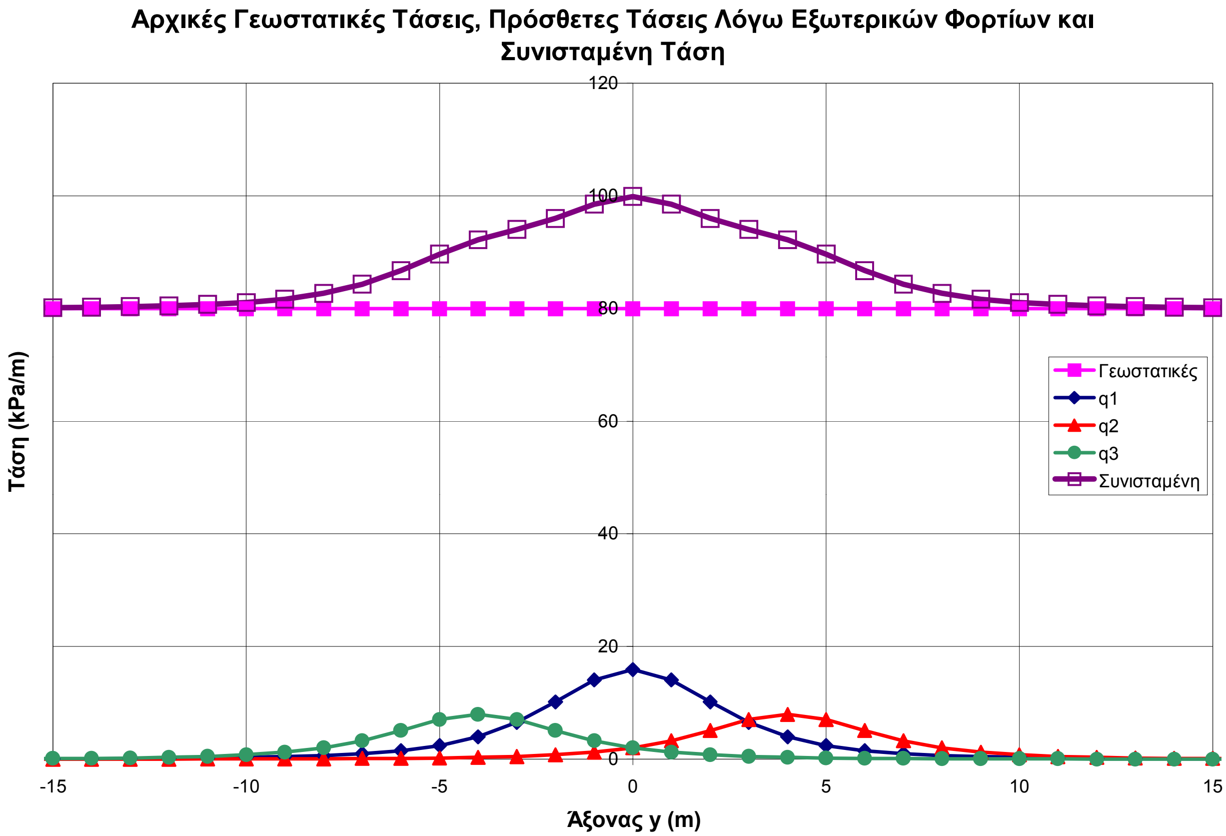
$\sigma_{yy}=\sigma_{yy,o}+\Delta\sigma_{yy}$, $\sigma_{zz}=\sigma_{zz,o}+\Delta\sigma_{zz}$, $\sigma_{yz}=\sigma_{yz,o}+\Delta\sigma_{yz}$, $\sigma_{xx}=\sigma_{xx,o}+\Delta\sigma_{xx}$

όπου ο δείκτης ο δηλώνει την αρχική εντατική κατάσταση η οποία στις συγκεκριμένες συνθήκες αντιστοιχεί σε γεωστατικές συνθήκες.

β) Εφαρμόζοντας επαλληλία των φορτίσεων προκύπτει η γενική συνάρτηση που δίνει τη συνολική τάση σε οποιοδήποτε κάθετο επίπεδο:

$\sigma_z=\sigma_{zz,o}+(2q_1/\pi)[(z^3)/(y^2+z^2)^2]+(2q_2/\pi)[(z'^3)/(y'^2+z'^2)^2]+(2q_3/\pi)[(z''^3)/(y''^2+z''^2)^2]$

Η σχέση αυτή είναι ανεξάρτητη του x και στο οριζόντιο επίπεδο α-α είναι z=z´=z´´=0m, με y´=y-4, y´´=y+4, ενώ y={-∞,+∞}. Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση σε ένα πρόγραμμα τύπου Excel και για ειδικό βάρος εδαφικού υλικού γ=20kN/m³ παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα:



γ)
Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις ισότροπης ελαστικότητας:
$\Delta\varepsilon_{zz}=(1/E)[\Delta\sigma_{zz}-\nu(\Delta\sigma_{xx}+\Delta\sigma_{yy})]=[1/30000kPa][19.90kPa-0.5(11.94kPa+3.98kPa)]=0.000398$ ή 0.0398%
$\Delta\varepsilon_{yy}=(1/E)[\Delta\sigma_{yy}-\nu(\Delta\sigma_{zz}+\Delta\sigma_{xx})]=[1/30000kPa][3.98kPa-0.5(19.90kPa+11.94kPa)]=-0.000398$ ή -0.0398%
$\Delta\varepsilon_{xx}=(1/E)[\Delta\sigma_{xx}-\nu(\Delta\sigma_{yy}+\Delta\sigma_{zz})]=[1/30000kPa][11.94kPa-0.5(3.98kPa+19.90kPa)]=0$ ή 0%

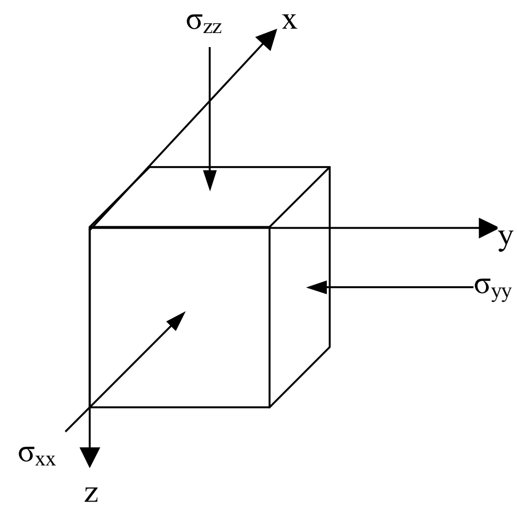
Δηλαδή προκύπτει $\Delta\varepsilon_{vol}=\Delta\varepsilon_{zz}+\Delta\varepsilon_{yy}+\Delta\varepsilon_{xx}=0$. Άρα, για τον καταστατικό νόμο της ισότροπης ελαστικότητας λόγος Poisson $\nu=0.5$ σημαίνει αστράγγιστες συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Θεωρούμε πως ισχύει η γραμμική ισότροπη ελαστικότητα σε ομοιογενή ημίχωρο. Οι αρχικές συνθήκες είναι γεωστατικές οπότε ισχύει $K_o=\nu/(1-\nu) \Rightarrow \nu=0.375$.

α)
y=0m, z=3m
$\Delta\sigma_{yy}=0kPa$
$\Delta\sigma_{zz}=[(500kN/m)/\pi]\{(3m)^3/[(0m)^2+(3m)^2]\}=53.05kPa$
$\Delta\sigma_{yz}=0kPa$
$\Delta\sigma_{xx}=0.375(0+3.98)=19.89\ kPa>\Delta\sigma_{yy}$

Αρχική κατάσταση:
$\sigma_{zz,o}=\gamma z=17\cdot 3=51kN/m^2$



$\sigma_{yy,o}$=$\sigma_{yy,o}$= $K_o\sigma_{zz,o}$=0.6·51=30.6kPa

Τελική κατάσταση:
σ_{zz}=$\sigma_{zz,o}$+$\Delta\sigma_{zz}$=51+53.05=104.05kPa
σ_{yy}= $\sigma_{yy,o}$+$\Delta\sigma_{yy}$=30.6+0=30.60kPa
σ_{xx}= $\sigma_{xx,o}$+$\Delta\sigma_{xx}$=30.6+19.89=50.49kPa
σ_{yz}=0kPa
σ_{xy}=σ_{xz}=0kPa $\Rightarrow$ όλες οι τάσεις είναι κύριες.

Έτσι: σ_1=σ_{zz}=104.05kPa, σ_2=σ_{xx}=50.49kPa, σ_3=σ_{yy}=30.60kPa

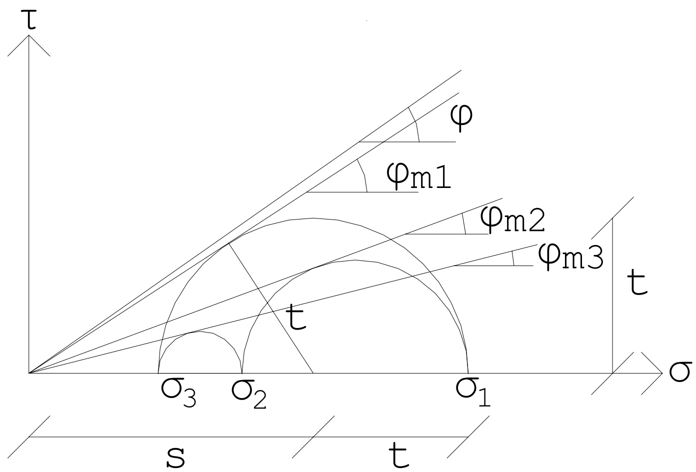
Για να δούμε αν αστοχεί το εδαφικό στοιχείο φέρνουμε τους τρεις κύκλους του Mohr και υπολογίζουμε την κινητοποιούμενη γωνία διατμητικής αντίστασης φ_m. Η φ_m αντιστοιχεί για υλικά χωρίς συνοχή c στο μέγιστο λόγο διατμητικής προς ορθής τάσης (τ/σ) από όλα τα ζεύγη (τ,σ) που προκύπτουν για τους τρεις κύκλους Mohr.

Η γωνία διατμητικής αντίστασης, φ, είναι παράμετρος αντοχής του υλικού. Αν προς όλες τις διευθύνσεις οι παράμετροι αντοχής είναι ίσες (συχνή παραδοχή), τότε το υλικό είναι ισότροπο είναι ισότροπο όσον αφορά το κριτήριο αστοχίας. Σε αυτήν την περίπτωση συγκρίνουμε τις τρεις τιμές φ_m με τη μία γωνία διατμητικής αντίστασης, φ, του υλικού.

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:
- φ_m<φ: το υλικό δεν αστοχεί
- φ_m=φ: το υλικό βρίσκεται σε κατάσταση αστοχίας
- φ_m>φ: είναι μη πραγματοποιήσιμη περίπτωση αφού το υλικό έχει ήδη αστοχήσει.

Όπως φαίνεται και από το σχήμα παρακάτω το ζεύγος σ_{zz}, σ_{yy} είναι αυτό μας δίνει το μεγαλύτερο φ_m. Υπολογίζουμε τα μεγέθη που ορίζουν πλήρως το κύκλο:
Ακτίνα κύκλου Mohr: t=(σ_1-σ_3)/2=(σ_{zz}-σ_{yy})/2=(104.05-36.73)/2=36.73kPa
Κέντρο κύκλου Mohr: s=(σ_1+$_3$)/2=(σ_{zz}+σ_{yy})/2=(104.05+36.73)/2=67.325kPa

Άρα είναι sinφ_m=t/s=36.73/67.325=0.545563$\Rightarrow\varphi_m$=33.06^o<φ=35^o, άρα δεν αστοχεί.



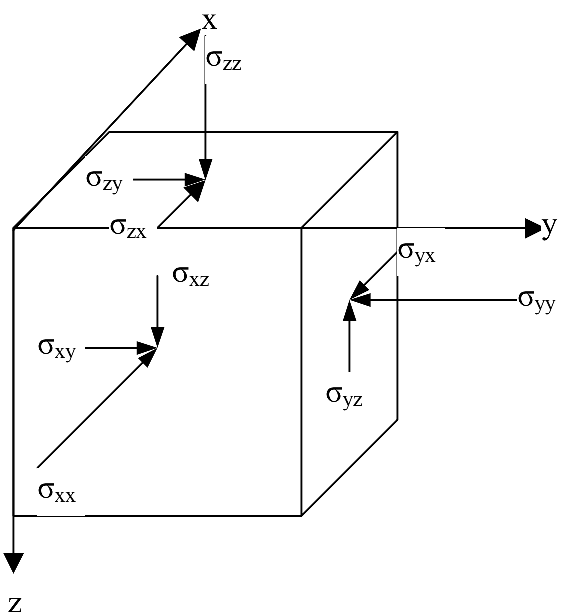
β)
Είναι y′=2m, z′=3m ⇒
$\Delta\sigma_{yy}=q(2/\pi)\{[(2m)^2(3m)]/[(2m)^2+(3m)^2]\}=0.0452q$
$\Delta\sigma_{zz}=q(2/\pi)\{[(3m)^3]/[(2m)^2+(3m)^2]\}=0.1017q$
$\Delta\sigma_{yz}=q(2/\pi)\{[(2m)(3m)^2]/[(2m)^2+(3m)^2]\}=0.0678q$
$\Delta\sigma_{xx}=0.375(0.0452q+0.1017q)=0.0551q>\Delta\sigma_{yy}$
$\Delta\sigma_{xz}=0$

Συνεπώς έχουμε:
$\sigma_{zz}=\sigma_{zz,o}+\Delta\sigma_{zz}=51+0.1017q$
$\sigma_{yy}=\sigma_{yy,o}+\Delta\sigma_{yy}=30.6+0.0452q$
$\sigma_{yz}=\sigma_{yz,o}+\Delta\sigma_{yz}=0.0678q$
$\sigma_{xx}=\sigma_{xx,o}+\Delta\sigma_{xx}=30.6+0.0551q$
$\sigma_{yz}=0kPa$
$\sigma_{xy}=\sigma_{xz}=0kPa$

Άρα όλες οι τάσεις σύμφωνα με τη τανυστική σύμβαση της Εδαφομηχανικής είναι θετικές. Οι φορές τους είναι απαραίτητες ώστε να σχεδιαστούν σύμφωνα με τη σύμβαση των κύκλων Mohr.

Επίσης, η σ_{xx} είναι κύρια τάση αφού και οι δύο διατμητικές τάσεις στο επίπεδο εφαρμογής τους είναι μηδενικές,

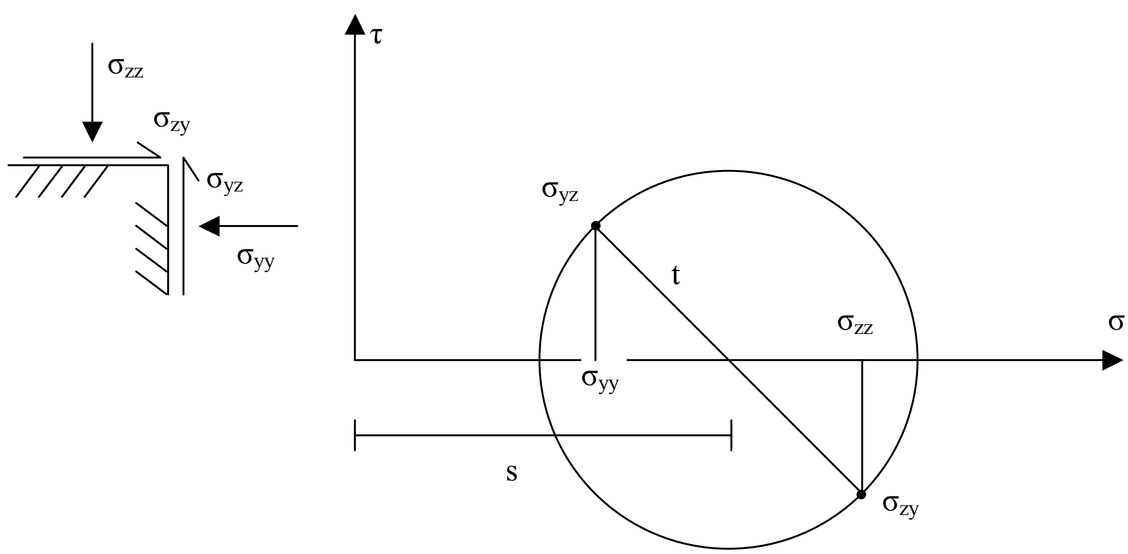
Στο παρακάτω σχήμα είναι σχεδιασμένες οι θετικές φορές σε ένα κυβικό στοιχείο σύμφωνα με την τανυστική σύμβαση της Εδαφομηχανικής.



Για να προσδιορίσουμε το μέγιστο φορτίο q πρέπει να βρούμε την τιμή του q για την οποία ο κύκλος Mohr εφάπτεται στην περιβάλλουσα αστοχίας. Έτσι, κατά την αστοχία: sinφ=t/s

Ο κύκλος Mohr που αναμένεται να είναι πιο κρίσιμος είναι αυτός που προκύπτει από τα ζεύγη (σ_{zz}, τ_{zy}) και (σ_{yy}, τ_{yz}) που είναι ο κύκλος που ελέγχουμε πρώτα.

Σύμφωνα με τη σύμβαση Mohr είναι (το q είναι θετικό):
σ_{zz}=51+0.1017q , σ_{yy}=30.6+0.0452q , σ_{yz}=0.0678q , σ_{zy}=-0.0678q



Προκύπτουν:
$s=(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})/2=40.8+0.07345q$ και
$t=[(s-\sigma_{yz})^2+(\sigma_{yz})^2]^{0.5}=[(10.2+0{,}02825q)^2+(0.0678q)^2]^{0.5}$
Όμως, sinφ=t/s, όπου $\varphi=35^o$.
Άρα προκύπτει μια εξίσωση δευτέρου βαθμού από την οποία πέρνουμε: q=592.36kN/m.

Για να επαληθεύσουμε πως αυτό είναι το ελάχιστο φορτίο q για το οποίο αστοχεί το υλικό θα κάνουμε την ίδια διαδικασία και για τους δύο κύκλους Mohr που δεν εξετάσαμε.

Τηρώντας τη σύμβαση Mohr έχουμε:

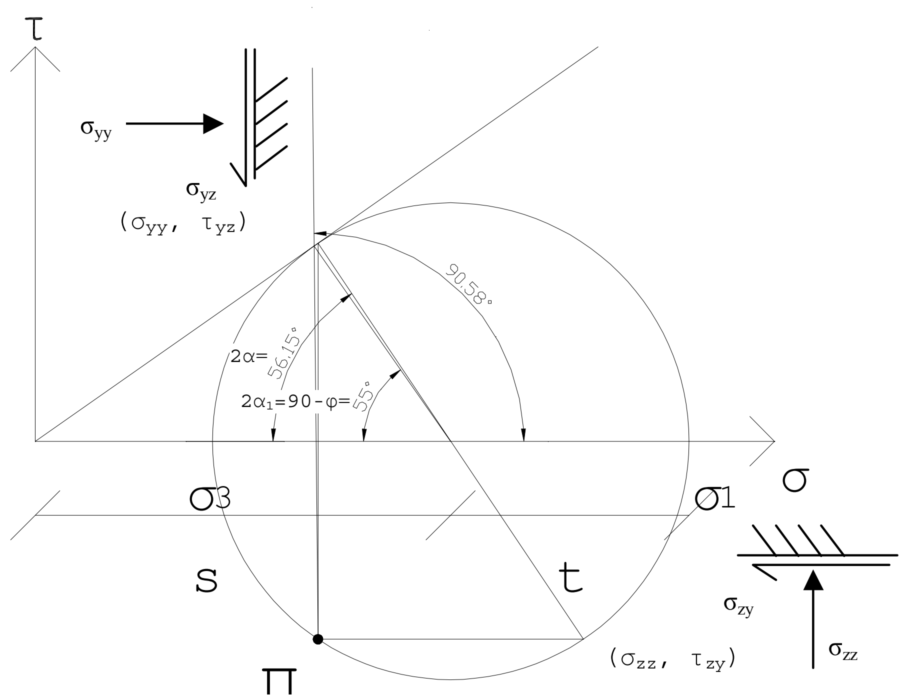
- σ_{zz}=51+0.1017q , σ_{xx}=30.6+0.0551q , σ_{xz}=0 , σ_{zx}=0
  Άρα, s=40.8+0.0784q και t=10.2+0.0467q.
  Είναι sinφ=t/s, όπου φ=35^o και συνεπώς προκύπτει q=17671kN/m.
- σ_{yy}=30.6+0.0452q , σ_{xx}=30.6+0.0551q , σ_{xy}=0 , σ_{yx}=0
  Άρα, s=30.6+0.05015q και t=0.00495q.
  Είναι sinφ=t/s, όπου φ=35^o. Προκύπτει πως δεν υπάρχει q για το οποίο αστοχεί.

Άρα το απαιτούμενο φορτίο για να υπάρχει αστοχία στο Β είναι q=592.36kN/m.

Όσον αφορά τη διεύθυνση του επιπέδου αστοχίας θα προχωρήσουμε σε μια ημιγραφική λύση και πάλι. Για q=592.36kN/m είναι:
σ_{zz}=51+0.1017q=111.24kPa
σ_{yy}=30.6+0.0452q=57.37kPa
σ_{yz}=0.0678q=40.16kPa
σ_{zy}=-0.0678q=-40.16kPa
Ο προσδιορισμός του πόλου φαίνεται στο σχήμα.

Ισχύουν: $\tan\varphi=\tau_f/\sigma_f$, $\tan(90-\varphi)=\tau_f/(s-\sigma_f)$, άρα:
$(s-\sigma_f)\tan(90-\varphi)=\sigma_f\tan\varphi \Rightarrow \sigma_f=84.31\tan55^o/(\tan35^o+\tan55^o) \Rightarrow$
σ_f=56.57kPa και τ_f=56.57tan35^o=39.61kPa (οι τάσεις στο επίπεδο αστοχίας)

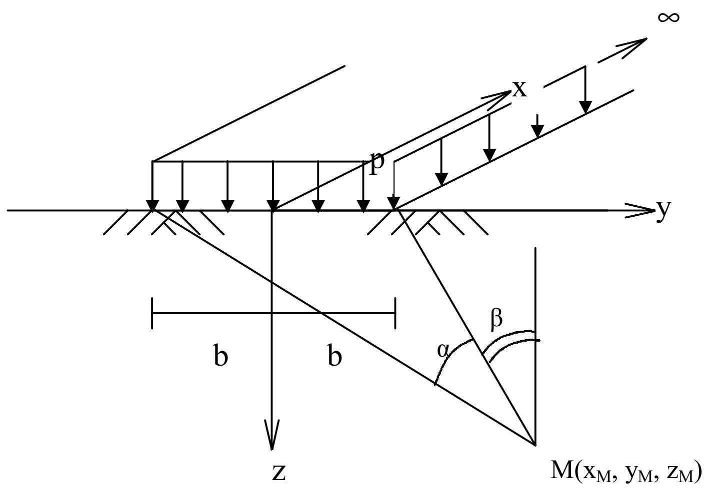
Είναι: $\tan2\alpha_1=\sigma_{yz}/(s-\sigma_{yy})=40.16/(84.31-57.37) \Rightarrow 2\alpha_1=56.15^o$.
Άρα η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο αστοχίας ως προς το οριζόντιο μετρώντας αριστερόστροφα είναι: $\theta=90+(2\alpha_1-2\alpha)/2=90+(56.15-55)/2=90.58^o$.



ΑΣΚΗΣΗ 3

Πρακτική εφαρμογή: Επίχωμα οδοποιίας.
Σημείωση: Η άσκηση θα λυθεί για $\gamma=20kN/m^3$, δεδομένο που δε δίνεται στην εκφώνηση.

Θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή ελαστικού ομοιογενή ημίχωρου για ισότροπο ελαστικό υλικό.



Οι πρόσθετες τάσεις που εφαρμόζονται στο έδαφος λόγω της εφαρμογής του λωριδωτού φορτίου p δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\Delta\sigma_{zz}=p[\alpha/\pi+(1/\pi)\cdot\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+2\beta)]$$
$$\Delta\sigma_{yy}=p[\alpha/\pi-(1/\pi)\cdot\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+2\beta)]$$
$$\Delta\sigma_{yz}=(p/\pi)\cdot\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+2\beta)]$$
$$\Delta\sigma_{xx}=\nu(\Delta\sigma_{yy}+\Delta\sigma_{zz})$$

Όπου οι α και β γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα.
- οι α και β γωνίες πάντα σε ακτίνια (rad)!
- η α γωνία είναι πάντα θετική
- η β γωνία είναι θετική όταν $|y_M|>b$, ενώ είναι αρνητική όταν $|y_M|<b$

Παρακάτω θα σχεδιάσουμε κύκλους Mohr. Προσοχή στη διαφορά μεταξύ της τανυστικής σύμβασης θετικών φορών και αυτής που ισχύει στην απεικόνιση με κύκλους Mohr. Ισχύουν ακριβώς τα ίδια με την άσκηση 6.2.

ΛΥΣΗ:
α) Σημείο Α
Είναι: $y_A=0m$, $z_A=2m$, $\alpha=\pi/2$ και $\beta=-\pi/4$
Συνεπώς:
$\Delta\sigma_{zz}=200kPa[(\pi/2)/\pi+(1/\pi)\cdot\sin(\pi/2)\cdot\cos(\pi/2-2\pi/4)]=163.66kPa$
$\Delta\sigma_{yy}=200kPa[(\pi/2)/\pi-(1/\pi)\cdot\sin(\pi/2)\cdot\cos(\pi/2-2\pi/4)]=36.34kPa$
$\Delta\sigma_{yz}=(200kPa/\pi)\cdot\sin(\pi/2)\cdot\sin(\pi/2-2\pi/4)]=0kPa$
$\Delta\sigma_{xx}=0.35(36.34+163.66)=70kPa$

Οι αρχικές τάσεις (πριν την επιβολή της φόρτισης) ήταν:
$\sigma_{zz,o}=2\cdot20=40kPa$

Για να υπολογίσουμε τις οριζόντιες χρειαζόμαστε το συντελεστή ουδέτερων ωθήσεων γαιών K_o. Επειδή δεν έχουμε άλλο στοιχείο κάνουμε την παραδοχή πως κατά τη διαδικασία της ιζηματογένεσης το υλικό συμπεριφέρθηκε ελαστικά.[1] Έτσι, είναι:
$K_o=\nu/(1-\nu)=0.35/(1-0.35)=0.54 \Rightarrow \sigma_{yy,o}=\sigma_{zz,o}=0.54 \cdot 40=21.60$kPa.

Άρα οι τελικές τάσεις είναι:
$\sigma_{zz}=\sigma_{zz,o}+\Delta\sigma_{zz}=40+163.66=203.66$kPa
$\sigma_{yy}=\sigma_{yy,o}+\Delta\sigma_{yy}=21.60+36.34=57.94$kPa
$\sigma_{yz}= \sigma_{yz,o}+\Delta\sigma_{yz}=0+0=0$kPa
$\sigma_{xx}=\sigma_{xx,o}+\Delta\sigma_{xx}=21.60+70=91.60$kPa
$\sigma_{xy}=\sigma_{xz}=0$kPa
Άρα: $\sigma_{1A}=\sigma_{zz}=203.66$kPa, $\sigma_{3A}=\sigma_{yy}=57.94$kPa. Διευθύνσεις τους φαίνονται στο σχήμα στο τέλος της άσκησης.

β) Σημείο Β
Είναι: $y_B=1$m, $z_B=2$m
$\tan\beta=1/2 \Rightarrow \beta=-26.57^o$ ή -0.464rad και
$\alpha=|\beta|+\mathrm{Arctan}(3/2)=26.57^o+56.30^o=82.87^o$ ή 1.446rad
Συνεπώς:
$\Delta\sigma_{zz}=200\text{kPa}[1.446/\pi+(1/\pi)\cdot\sin(1.446)\cdot\cos(1.446-2\cdot0.464]=146.94$kPa
$\Delta\sigma_{yy}=200\text{kPa}[1.446/\pi-(1/\pi)\cdot\sin(1.446)\cdot\cos(1.446-2\cdot0.464]=37.18$kPa
$\Delta\sigma_{yz}=(200\text{kPa}/\pi)\cdot\sin(1.446)\cdot\sin(1.446-2\cdot0.464]=31.28$kPa
$\Delta\sigma_{xx}=0.35(37.18+146.94)=64.44$kPa

Άρα οι τελικές τάσεις είναι:
$\sigma_{zz}=\sigma_{zz,o}+\Delta\sigma_{zz}=40+146.94=186.94$kPa
$\sigma_{yy}=\sigma_{yy,o}+\Delta\sigma_{yy}=21.60+37.18=58.78$kPa
$\sigma_{yz}= \sigma_{yz,o}+\Delta\sigma_{yz}=0+31.28=31.28$kPa
$\sigma_{xx}=\sigma_{xx,o}+\Delta\sigma_{xx}=21.60+64.44=86.04$kPa
$\sigma_{xy}=\sigma_{xz}=0\text{kPa} \Rightarrow$ η σ_{xx} είναι κύρια τάση.

Θα υπολογίσουμε τις άλλες δύο κύριες τάσεις για τα ζεύγη (σ_{zz}, τ_{zy}) και (σ_{yy}, τ_{yz}):
Είναι: $s=(186.94+58.78)/2=122.86$kPa και $t=[31.28^2+(122.86-58.78)^2]^{0.5}=71.31$kPa
$s+t=194.17$kPa και $s-t=51.55$kPa, συνεπώς:
$\sigma_{1B}= 194.17$kPa, $\sigma_{3B}= 51.55$kPa. Διευθύνσεις τους φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

Έστω θ_B η γωνία του επιπέδου εφαρμογής της σ_{3B} με την κατακόρυφο. Τότε η επίκεντρος γωνία $2\theta_B$ δίνει: $\tan2\theta_B=\sigma_{yz}/(s-\sigma_{yy}) \Rightarrow \theta_B=13.01^o$.

γ) Σημείο Γ
Είναι: $y_\Gamma=3$m, $z_\Gamma=2$m
$\tan\beta=1/2 \Rightarrow \beta=26.57^o$ ή 0.464rad και $\tan(\alpha+\beta)=5/2 \Rightarrow \alpha=0.726$rad
Συνεπώς: $\Delta\sigma_{zz}=200\text{kPa}[0.726/\pi+(1/\pi)\cdot\sin(0.726)\cdot\cos(0.726+2\cdot0.464)]=42.71$kPa
$\Delta\sigma_{yy}=200\text{kPa}[0.726/\pi-(1/\pi)\cdot\sin(0.726)\cdot\cos(0.726+2\cdot0.464)]=49.73$kPa

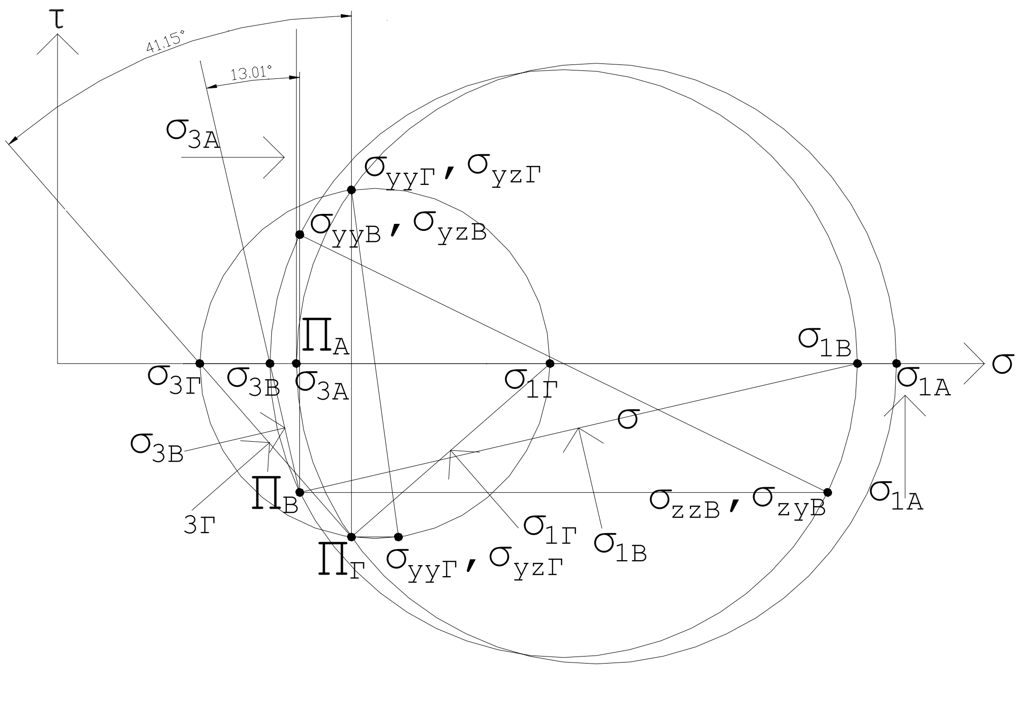
[1] η παραδοχή αυτή δεν είναι και πολύ καλή διότι αφενός μεν διότι κατά την ιζηματογένεση το υλικό παρα μορφώνεται πλαστικά και αφετέρου δε διότι οι παραμορφώσεις αυτές είναι κατά κανόνα μεγάλες. Συνεπώς, δεν μπορούμε να πούμε πως το σφάλμα με την παραδοχή της ελαστικότητας είναι μικρό.

$\Delta\sigma_{yz}$=(200kPa/π)·sin(0.726)·sin(0.726+2·0.464)]=42.12kPa
$\Delta\sigma_{xx}$=0.35(49.73+42.71)=32.35kPa

Άρα οι τελικές τάσεις είναι:
$\sigma_{zz}=\sigma_{zz,o}+\Delta\sigma_{zz}$=40+42.71=82.71kPa
$\sigma_{yy}=\sigma_{yy,o}+\Delta\sigma_{yy}$=21.60+49.73=71.33kPa
$\sigma_{yz}=\sigma_{yz,o}+\Delta\sigma_{yz}$=0+42.12=42.12kPa
$\sigma_{xx}=\sigma_{xx,o}+\Delta\sigma_{xx}$=21.60+32.35=53.95kPa
$\sigma_{xy}=\sigma_{xz}$=0kPa$\Rightarrow$ η σ_{xx} είναι κύρια τάση.

Θα υπολογίσουμε τις άλλες δύο κύριες τάσεις για τα ζεύγη (σ_{zz}, τ_{zy}) και (σ_{yy}, τ_{yz}):
Είναι: s=(82.71+71.33)/2=77.02kPa και t=[42.12^2+(77.02-71.33)^2]$^{0.5}$=42.50kPa
s+t=119.52kPa και s-t=34.52kPa, συνεπώς:
$\sigma_{1\Gamma}$= 119.52kPa, $\sigma_{3\Gamma}$= 34.52kPa. Διευθύνσεις τους φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

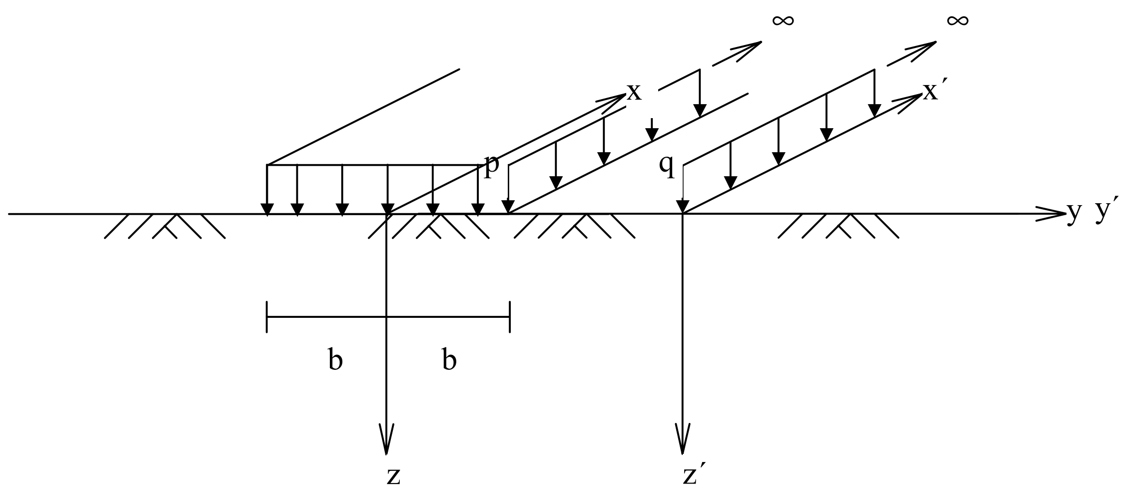
Έστω θ_Γ η γωνία του επιπέδου εφαρμογής της $\sigma_{3\Gamma}$ με την κατακόρυφο. Τότε η επίκεντρος γωνία $2\theta_\Gamma$ δίνει:
$\tan 2\theta_\Gamma=\sigma_{yz}/(s-\sigma_{yy})\Rightarrow\theta_\Gamma=41.15^o$.



ΑΣΚΗΣΗ 4

Και σε αυτήν την άσκηση θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή ελαστικού ομοιογενή ημίχωρου για ισότροπο ελαστικό υλικό και που χρησιμοποιήθηκαν στις προηγούμενες ασκήσεις. Ισχύει προφανώς η αρχή της επαλληλίας των φορτίσεων.

Προκειμένου να προσδιοριστούν οι ανηγμένες παραμορφώσεις (ή ο τανυστής των ανηγμένων παραμορφώσεων) πρέπει να υπολογιστεί η μεταβολή του τανυστή των τάσεων λόγω της επιβολής των εξωτερικών φορτίων.



- Απειρόμηκες λωριδωτό φορτίο p=50kPa

Είναι: y=0m, z=3m, $\alpha/2=\mathrm{Arctan}(2/3)=67.38^{o}$ ή 1.176rad, $\beta=-\alpha/2 \Rightarrow$

$\Delta\sigma_{zz,1}$=50kPa[1.176/π+(1/π)·sin(1.176)·cos(0)]=33.41kPa

$\Delta\sigma_{yy,1}$=50kPa[1.176/π-(1/π)·sin(1.176)·cos(0)]=4.03kPa

$\Delta\sigma_{yz,1}$=(50kPa/π)·sin(1.176)·sin(0)]=0kPa

$\Delta\sigma_{xx,1}$=0.5(4.03+33.41)=18.72kPa

- Απειρόμηκες γραμμικό φορτίο q=100kN/m

Προσοχή! Εισάγουμε μετατοπισμένο τοπικό σύστημα συντεταγμένων κατά το οποίο ο άξονας των χ συμπίπτει με το ίχνος του απειρόμηκους φορτίου q. Οι συντεταγμένες του σημείου Α προσδιορίζονται σχετικά με αυτό το σύστημα συντεταγμένων:

Είναι y΄=-5m, z΄=3m $\Rightarrow$

$\Delta\sigma_{zz,2}=[(100kN/m)/\pi]\{(3m)^3/[(-5m)^2+(3m)^2]^2\}=0.74kPa$

$\Delta\sigma_{yy,2}=[(100kN/m)/\pi]\{[(-5m)^2(3m)]/[(-5m)^2+(3m)^2]^2\}=2.07kPa$

$\Delta\sigma_{yz,2}=[(100kN/m)/\pi]\{(-5m)(3m)^2/[(-5m)^2+(3m)^2]^2\}=-1.24kPa$

$\Delta\sigma_{xx,2}$=0.5(0.74+2.07)=1.41kPa

Εφαρμόζοντας επαλληλία των φορτίσεων έχουμε:

$\Delta\sigma_{zz}= \Delta\sigma_{zz,1}+\Delta\sigma_{zz,2}$=33.41+0.74=34.15kPa

$\Delta\sigma_{yy}= \Delta\sigma_{yy,1}+\Delta\sigma_{yy,2}$=4.03+2.07=6.10kPa

$\Delta\sigma_{yz}= \Delta\sigma_{yz,1}+\Delta\sigma_{yz,2}$=0+(-1.24)=-1.24kPa

$\Delta\sigma_{xx}= \Delta\sigma_{xx,1}+\Delta\sigma_{xx,2}$=18.72+1.41=20.13kPa

Θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις ισότροπης ελαστικότητας. Το ελαστικό μέτρο διάτμησης, G, συνδέεται με το μέτρο ελαστικότητας, E, σύμφωνα με τη σχέση:

$G=E/[2(1+\nu)]\Rightarrow E=2(1+\nu)G$=2(1+0.5)20000kPa=60000kPa

Άρα: $\Delta\varepsilon_{zz}=(1/E)[\Delta\sigma_{zz}-\nu(\Delta\sigma_{xx}+\Delta\sigma_{yy})]$=[1/60000kPa][34.15kPa-0.5(20.13kPa+6.10kPa)] =
=0.000351 ή 0.0351%

$\Delta\varepsilon_{yy}=(1/E)[\Delta\sigma_{yy}-\nu(\Delta\sigma_{zz}+\Delta\sigma_{xx})]$=[1/60000kPa][6.10kPa-0.5(34.15kPa+20.13kPa)] =
= - 0.000351 ή - 0.0351%

$\Delta\varepsilon_{xx}=(1/E)[\Delta\sigma_{xx}-\nu(\Delta\sigma_{yy}+\Delta\sigma_{zz})]$=[1/60000kPa][20.13kPa-0.5(6.10kPa+34.15kPa)]=0

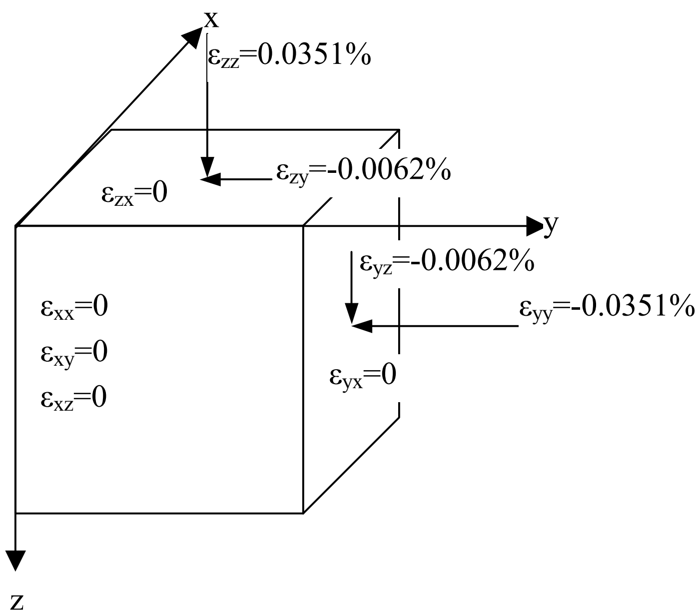
(αναμενόμενο λόγω συμμετρίας)

$\Delta\gamma_{yz} = \Delta\gamma_{zy} = \Delta\tau_{yz}/G = \Delta\sigma_{yz}/G = 1.24kPa/60000kPa = -0.000062$ ή 0.0062%.

Παρατηρούμε πως $\Delta\varepsilon_{vol}=0$, ως άμεση συνέπεια του $\nu=0.5$. Δηλαδή έχουμε ισό-ογκη παραμόρφωση, άρα αστράγγιστες συνθήκες.

Το γεγονός πως για $\nu=0.5$ έχουμε ισό-ογκη παραμόρφωση οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στον καταστατικό νόμο που ισχύει για την ισότροπη ελαστικότητα.

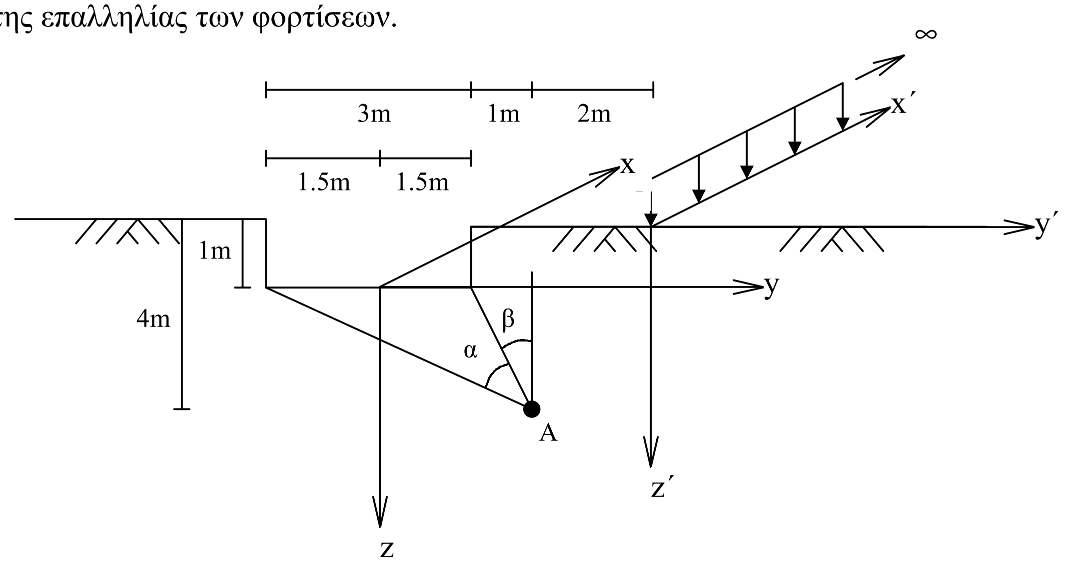
Παρακάτω φαίνονται οι παραμορφώσεις με τις φορές τους.



ΑΣΚΗΣΗ 5

Στην άσκηση αυτή έχουμε μια απείρου μήκους λωριδωτή εκσκαφή και ένα απείρου μήκους γραμμικό φορτίο.

Όπως στις προηγούμενες ασκήσεις έτσι και σε αυτήν την άσκηση θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή ελαστικού ομοιογενή ημίχωρου για ισότροπο ελαστικό υλικό και που χρησιμοποιήθηκαν στις προηγούμενες ασκήσεις. Ισχύει προφανώς η αρχή της επαλληλίας των φορτίσεων.



- Αρχική εντατική κατάσταση (γεωστατικές συνθήκες):

$$\sigma_{zz,o}=20\cdot 4=80kPa,\ \sigma_{yy,o}=\sigma_{xx,o}=0.45\cdot 80=36kPa,\ \sigma_{yz,o}=0kPa$$

- Εσκαφή: Αντιμετωπίζεται ως απειρόμηκες λωριδωτό φορτίο $p=-\gamma d=-20\cdot 1=20kPa$, όπου d το βάθος εκσκαφής.

💣 Προσοχή! Οι γωνίες α και β προσδιορίζονται στο επίπεδο που εφαρμόζεται το αρνητικό φορτίο, δηλαδή στο δάπεδο της εκσκαφής.
Είναι: $y=2.5m$, $z_A=3m$, $\beta=\text{Arctan}(1/3)=0.322rad$, $\alpha+\beta=\text{Arctan}(4/3)\Rightarrow\alpha=0.605rad$.
Συνεπώς:

$$\Delta\sigma_{zz,1}=-20kPa[0.605/\pi+(1/\pi)\cdot\sin(0.605)\cdot\cos(0.605+2\cdot 0.322)] = -5kPa$$

$$\Delta\sigma_{yy,1}=-20kPa[0.605/\pi-(1/\pi)\cdot\sin(0.605)\cdot\cos(0.605+2\cdot 0.322)] = -2.71kPa$$

$$\Delta\sigma_{yz,1}=(-20kPa/\pi)\cdot\sin(0.605)\cdot\sin(0.605+2\cdot 0.322)] = -3.43kPa$$

$$\Delta\sigma_{xx,1}=0.3(-2.71-5) = -2.31kPa$$

- Απειρόμηκες γραμμικό φορτίο $q=120kN/m$

💣Προσοχή! Εισάγουμε μετατοπισμένο τοπικό σύστημα συντεταγμένων κατά το οποίο ο άξονας των χ συμπίπτει με το ίχνος του απειρόμηκους φορτίου q. Οι συντεταγμένες του σημείου A προσδιορίζονται σχετικά με αυτό το σύστημα συντεταγμένων:
Είναι $y'=-2m$, $z'=4m \Rightarrow$

$$\Delta\sigma_{zz,2}=[(240kN/m)/\pi]\{(4m)^3/[(-2m)^2+(4m)^2]^2\}=12.22kPa$$

$$\Delta\sigma_{yy,2}=[(240kN/m)/\pi]\{[(-2m)^2(4m)]/[(-2m)^2+(4m)^2]^2\}=3.06kPa$$

$$\Delta\sigma_{yz,2}=[(240kN/m)/\pi]\{(-2m)(4m)^2/[(-2m)^2+(4m)^2]^2\}=-6.11kPa$$

$$\Delta\sigma_{xx,2}=0.5(0.74+2.07)=1.41kPa$$

Εφαρμόζοντας επαλληλία των μεταβολών των φορτίων και αθροίζοντάς τα στα αρχικά έχουμε:

$$\sigma_{zz}=\sigma_{zz,o}+\Delta\sigma_{zz,1}+\Delta\sigma_{zz,2}=80+(-5)+12.22=87.22kPa$$

$$\sigma_{yy}=\sigma_{yy,o}+\Delta\sigma_{yy,1}+\Delta\sigma_{yy,2}=36+(-2.71)+3.06=36.35kPa$$

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xx,o}+\Delta\sigma_{xx,1}+\Delta\sigma_{xx,2}=36+(-2.31)+4.58=38.27kPa$$

$$\sigma_{yz}=\sigma_{yz,o}+\Delta\sigma_{yz,1}+\Delta\sigma_{yz,2}=0+(-3.43)+(-6.11)=-9.54kPa$$

$$\sigma_{xy}=\sigma_{xz}=0kPa\Rightarrow \text{η } \sigma_{xx} \text{ είναι κύρια τάση.}$$