Εξέταση: Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ιανουάριος 2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Διάρκεια εξέτασης: **2 ώρες**

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Σημείωση.

Για να εξεταστείτε επιτυχώς στο μάθημα θα πρέπει να εξασφαλίσετε **2 μονάδες σε κάθε μία** από τις δύο ενότητες του μαθήματος και **5 μονάδες συνολικά**.

Ενότητα Μαθηματικής Ανάλυσης

Θέμα 1.

(i) Υπολογίστε τον αριθμό $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\cdot 3^k\cdot(-2)^{8-k}$. **(0,2 μ.)**

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}\,,\quad (\mathbf{0,3\mu.})\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}.\quad(\mathbf{0,3\mu.})$$

(iii) Να βρείτε το σύνολο όλων των $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}\cdot x^n$ συγκλίνει. **(0,6 μ.)**

(iv) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,3)$ ισχύει

$$\left|\,e^{\frac{x}{3}}-\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2\cdot 2!}+\frac{x^3}{3^3\cdot 3!}\right)\right|\le\frac{x^4}{3^3\cdot 4!}\,.\quad(\mathbf{0,6\mu.})$$

Θέμα 2.

(i) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I=\int\frac{1}{x^2+8x+19}\,dx.\quad(\mathbf{0,8\mu.})$$

(ii) Εξετάστε αν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$J=\int_0^{\infty}x\cdot e^{-x^2}\,dx\quad(\mathbf{0,7\mu.})$$

στο $\mathbb{R}$ και σε αυτή την περίπτωση να το υπολογίσετε.

Θέμα 3. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1=\frac{9}{2}\,,\quad a_{n+1}=1+\sqrt{7\cdot a_n-19},\ n\ge 1.$$

(i) Δείξτε με επαγωγή ότι $\frac{9}{2}\le a_n\le 5$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. **(0,5 μ.)**

(ii) Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αύξουσα. **(0,5 μ.)**

(iii) Εξηγείστε γιατί η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει και να υπολογίσετε το όριό της. **(0,5 μ.)**

Θέμα 1. Δίνονται οι συντεταγμένες τριών σημείων του χώρου $A = (4, 1, 1)$, $B = (0, 1, 2)$ και $\Gamma = (3, 0, 5)$.

(i) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, καθώς και ένα διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτό το επίπεδο. **(1 μ.)**

(ii) Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Δ με συντεταγμένες $(6, 5, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (1, 9, 2)$. **(0,5 μ.)**

Θέμα 2.

(i) Δίνεται A ένας τετραγωνικός πίνακας 5×5, ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)(\lambda + 5)^2, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αντιστρέφεται ο πίνακας A; Αν ναι, ποιες είναι οι ιδιοτιμές του; (Δικαιολόγηση.) **(0,5 μ.)**

(ii) Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3-a & a-2 \\ 1 & 2-a & a-1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ο πίνακας B διαγωνοποιείται. **(1 μ.)**

(β) Για την τιμή της παραμέτρου που θα βρείτε, να κατασκευάσετε μία διαγωνοποίηση του πίνακα B (δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα P που τον διαγωνοποιεί). **(0,5 μ.)**

Θέμα 3.

(i) Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (δικαιολόγηση):

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0,8\mu}.).$$

(ii) Να βρείτε το σύνολο όλων των $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, τα οποία είναι λύσεις του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{cases} y + 4z - w = 4 \\ x + 2y - 7z \qquad = -3 \\ -2x - 6y + 6z + 2w = -2 \end{cases} \quad (\mathbf{0,7\mu}.).$$