Εξέταση: Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Επαναληπτική Εξέταση 2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Διάρκεια εξέτασης: **2 ώρες**

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Σημείωση.

Για να εξεταστείτε επιτυχώς στο μάθημα θα πρέπει να εξασφαλίσετε **2 μονάδες σε κάθε μία** από τις δύο ενότητες του μαθήματος και **5 μονάδες συνολικά**.

Ενότητα Μαθηματικής Ανάλυσης

Θέμα 1.

(i) Βρείτε το $\min A$, όπου $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x-5)(x^2+2x-8) = 0\}$. **(0,3 μ.)**

(ii) Βρείτε το όριο της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ όπου $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **(0,3 μ.)**

(iii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (\mathbf{0,3\mu.}) \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n^2+3} \quad (\mathbf{0,3\mu.}).$$

(iv) Να βρείτε το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ συγκλίνει. **(0,4 μ.)**

(v) Ποιο είναι το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \sin x$ στο $x_0 = 0$ τάξης 4; Στη συνέχεια αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\left| \sin(2x) - \left(2x - \frac{2^3}{3!}\cdot x^3\right) \right| \leq \frac{2^5}{5!}\cdot x^5 . \quad (\mathbf{0,7\mu.})$$

Θέμα 2.

(i) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x}{x^2-2x-3}\,dx. \quad (\mathbf{0,7\mu.})$$

(ii) Εξετάστε αν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$J = \int_0^{\infty} x \cdot \cos(x^2)\,dx \quad (\mathbf{0,5\mu.})$$

στο $\mathbb{R}$ και σε αυτή την περίπτωση να το υπολογίσετε.

Θέμα 3. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = \frac{5}{2}\,, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{8} + \frac{3}{2},\ n \geq 1.$$

(i) Δείξτε με επαγωγή ότι $2 \leq a_n \leq 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. **(0,5 μ.)**

(ii) Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φθίνουσα. **(0,5 μ.)**

(iii) Εξηγείστε γιατί η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της. **(0,5 μ.)**

Ενότητα Γραμμικής Άλγεβρας

Θέμα 1.

(i) Δίνονται οι συντεταγμένες τριών σημείων του χώρου $A = (1,0,4)$, $B = (2,1,0)$ και $\Gamma = (0,3,5)$. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία αυτά καθώς και ένα διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτό το επίπεδο. **(1 μ.)**

(ii) Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Δ με συντεταγμένες $(1,1,2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(3,9,4)$. **(0,5 μ.)**

Θέμα 2. Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} -10 & 36 & 18 \\ -9 & 26 & 9 \\ 9 & -18 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Να βρείτε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του. **(1 μ.)**

(ii) Να δείξετε ότι ο A αντιστρέφεται και διαγωνοποιείται. Να γράψετε μία διαγωνοποίησή του (δεν χρειάζεται να βρείτε τον αντίστροφο του P). **(0,5 μ.)**

Θέμα 3.

(i) Πότε τρία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ενός διανυσματικού χώρου E είναι γραμμικά ανεξάρτητα; **(0,3 μ.)**

(ii) Δίνονται τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

του χώρου $\mathbb{R}^4$. Για ποιες τιμές της παραμέτρου $b \in \mathbb{R}$ τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα; **(0,5 μ.)**

(iii) Να λύσετε το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y, z για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, **(1,2 μ.)**

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2, \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2, \\ x + y + z = 1 - a. \end{cases}$$