Εξέταση: Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλεβρα

Φεβρουάριος 2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Διάρκεια εξέτασης: **1 ώρα** και **30 λεπτά**

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Σημείωση. Για να εξεταστείτε επιτυχώς στο μάθημα θα πρέπει να εξασφαλίσετε **2 μονάδες σε κάθε μία** από τις δύο ενότητες του μαθήματος και **5 μονάδες συνολικά**.

Ενότητα Μαθηματικής Ανάλυσης

Θέμα 1.

(i) Δίνονται δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ικανοποιούν $a_n + b_n \to 0$. Είναι τότε η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνουσα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **(0,3 μ.)**

(ii) Εξετάστε τις σειρές

$$\textbf{(0,3 μ.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \textbf{(0,3 μ.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^7+n+1}$$

ως προς τη σύγκλιση.

(iii) Να βρεθεί το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά

$$\textbf{(0,8 μ.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot x^n$$

συγκλίνει.

Θέμα 2. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5\cdot a_n - 1}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(i) Δείξτε με επαγωγή ότι $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. **(0,6 μ.)**

(ii) Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αύξουσα. **(0,6 μ.)**

(iii) Εξηγείστε γιατί η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει και να υπολογίσετε το όριό της. **(0,5 μ.)**

Θέμα 3.

(i) Να δώσετε το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^x$ σε δυναμοσειρά κέντρου 0 καθώς και το πολυώνυμο Taylor $P_3^{f,0}$ της f τάξης 3 στο 0. **(0,4 μ.)**

(ii) Να αποδείξετε ότι

$$\left|\sqrt[3]{e} - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2\cdot 2!} + \frac{1}{3^3\cdot 3!}\right)\right| \leq \frac{3}{3^4\cdot 4!}\,. \quad \textbf{(0,6 μ.)}$$

(iii) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{x^2+5x+9}\,dx. \quad \textbf{(0,6 μ.)}$$

Ενότητα Γραμμικής Άλγεβρας

Θέμα 1.

(i) Να υπολογίσετε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P ο οποίος διαγωνοποιεί τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -12 & 6 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 12 & -7 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 μ.)}$$

(ii) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A ικανοποιεί τη σχέση

$$A^{2021} + A^{2020} - A = I. \quad \textbf{(1 μ.)}$$

Σημείωση. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον αντίστροφο του P.

Θέμα 2.

(i) Δίνονται τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ a+2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3a \end{pmatrix}$$

του $\mathbb{R}^3$ όπου $a \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές της παραμέτρου a τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα; **(0,5 μ.)**

(ii) Δίνεται το σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x,y,z:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + k \cdot y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + k \cdot z = 3 \end{cases}$$

όπου $k \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές της παραμέτρου k το πιο πάνω σύστημα:

(α′) Είναι αδύνατο; **(0,3 μ.)**

(β′) Έχει μόνο μία λύση και ποια είναι αυτή; **(0,5 μ.)**

(γ′) Έχει άπειρες λύσεις και ποια είναι η μορφή τους; **(0,5 μ.)**

Θέμα 3. Δίνονται οι Καρτεσιανές συντεταγμένες τριών σημείων του χώρου, $A = (0,1,1)$, $B = (1,0,2)$ και $\Gamma = (0,0,4)$.

(i) Να βρεθεί η αλγεβρική εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία. **(0,5 μ.)**

(ii) Να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα του επιπέδου. **(0,2 μ.)**

(iii) Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση μιας ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο A και κείται στο πιο πάνω επίπεδο. **(0,5 μ.)**