Εξέταση: Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Σεπτέμβριος 2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Διάρκεια εξέτασης: **1 ώρα** και **30 λεπτά**

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Σημείωση.

Για να εξεταστείτε επιτυχώς στο μάθημα θα πρέπει να εξασφαλίσετε **2 μονάδες σε κάθε μία** από τις δύο ενότητες του μαθήματος και **5 μονάδες συνολικά**.

Ενότητα Μαθηματικής Ανάλυσης

Θέμα 1.

(i) Βρείτε με ποιον πραγματικό αριθμό είναι ίση η παράσταση $\displaystyle\sum_{k=0}^{45} \binom{45}{k} \cdot (-1)^k$. $(\mathbf{0,3\mu.})$

(ii) Εξετάστε τις σειρές

$$(\mathbf{0,3\mu.}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^7+1)}{n^2} \qquad (\mathbf{0,3\mu.}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$$

ως προς τη σύγκλιση.

(iii) Βρείτε το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά

$$(\mathbf{0,8\mu.}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 3^{-n} \cdot x^n$$

συγκλίνει.

Θέμα 2. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = 4 \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot a_n - 3} + 2\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(i) Δείξτε με επαγωγή ότι $4 \leq a_n \leq 5$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. $(\mathbf{0,8\mu.})$

(ii) Παίρνοντας δεδομένο ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αύξουσα εξηγήστε γιατί η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της. $(\mathbf{0,8\mu.})$

Θέμα 3.

(i) Να αποδείξετε ότι

$$\left|\sqrt{e} - \left(1 + \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!}\right)\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}\,. \quad (\mathbf{0,7\mu.})$$

(ii) Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$(\mathbf{0,5\mu.}) \quad I_1 = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,dx, \qquad (\mathbf{0,5\mu.}) \quad I_2 = \int \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx.$$

Ενότητα Γραμμικής Άλγεβρας

Θέμα 1.

(i) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (Π) που διέρχεται από τα σημεία $A = (0, 1, 4)$, $B = (1, 0, 2)$ και $\Gamma = (3, 2, 0)$. $(\mathbf{0, 5\mu.})$

(ii) Βρείτε ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο (Π). $(\mathbf{0, 4\mu.})$

(iii) Βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στο επίπεδο (Π) και διέρχεται από το σημείο A. $(\mathbf{0, 3\mu.})$

Θέμα 2. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -a+6 & 0 & a-2 \\ -6 & 1 & 6 \\ -a+2 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

(i) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, για την οποία ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. $(\mathbf{1, 5\mu.})$

(ii) Για την τιμή που προσδιορίσατε στο προηγούμενο ερώτημα, να δώσετε μία διαγωνοποιημένη μορφή του πίνακα A (δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα που τον διαγωνοποιεί). $(\mathbf{0, 5\mu.})$

Θέμα 3.

(i) Δίνεται το σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y, z, w:

$$2x - 3y - z + w = 1$$

$$3x - y - 5z + 2w = 3$$

$$10x - y - 19z + 7w = 11.$$

Αφού γράψετε το σύστημα σε μορφή πινάκων $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, να το λύσετε με απαλοιφή Gauss φθάνοντας σε μορφή ανηγμένου κλιμακωτού και να δώσετε τη γενική μορφή των λύσεων του συστήματος. $(\mathbf{1, 3\mu.})$

(ii) Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ να μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^4$, όπου

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad (\mathbf{0, 5\mu.})$$