

Εξέταση: Μαθηματική Ανάλυση  
και Γραμμική Άλγεβρα

Σεπτέμβριος 2021

22 Σεπτ. 18:00

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών



Διάρκεια εξέτασης: 1 ώρα και 30 λεπτά

Διδάσκοντες:  
Β. Γρηγοριάδης  
Κ. Παυλοπούλου

**Σημείωση.**

Για να εξεταστείτε επιτυχώς στο μάθημα θα πρέπει να εξασφαλίσετε 2 μονάδες σε κάθε μία από τις δύο ενότητες του μαθήματος.

Ενότητα Μαθηματικής Ανάλυσης

**Θέμα 1.**

(i) Εξετάστε αν το παρακάτω σύνολο φυσικών αριθμών είναι πεπερασμένο **(0,4 μ.)**.

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{-n} > 10^{-7}\}.$$

(ii) Να βρεθεί το σύνολο όλων των  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία η σειρά

$$\mathbf{(0,8\mu.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{5/2}} \cdot x^n$$

συγκλίνει.

**Θέμα 2.** Δίνεται η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(i) Ναδειχθεί με επαγωγή ότι  $1 \leq a_n \leq 2$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$ . **(0,6 μ.)**

(ii) Ναδειχθεί ότι η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  είναι αύξουσα. **(0,8 μ.)**

(iii) Εξηγήστε γιατί η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  συγκλίνει και να υπολογίσετε το όριό της. **(0,6 μ.)**

**Θέμα 3.**

(i) Να δώσετε το ανάπτυγμα της συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sin x$  σε δυναμοσειρά κέντρου 0 και να αποδείξετε ότι

$$\left| \sin\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3!}\right) \right| \leq \frac{1}{2^4 \cdot 4!}. \quad \mathbf{(1\mu.)}$$

(ii) Να υπολογιστεί το άριστο ολοκλήρωμα

$$\mathbf{(0,8\mu.)} \quad I = \int \frac{1}{x^2 - 4x - 5} dx.$$

## Ενότητα Γραμμικής Άλγεβρας

**Θέμα 1. (2 μ.)** Να λύσετε το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους  $x, y, z$ . Το σύνολο των λύσεων του συστήματος παριστάνει μία ευθεία ή ένα επίπεδο του χώρου  $\mathbb{R}^3$ ;

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10. \end{cases}$$

**Θέμα 2. (2 μ.)** Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 - a & a & a - 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

όπου  $a \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε όλες τις τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται.

**Θέμα 3. (1 μ.)** Δίνονται οι εξισώσεις των ευθειών

$$(\varepsilon_1): \quad \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{5 - z}{3} \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): \quad 1 - x = y = z - 2,$$

καθώς και η εξίσωση του επιπέδου

$$(\pi): \quad x + y + z = 4.$$

(i) Να δείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon_1)$  βρίσκεται στο επίπεδο  $(\pi)$ , ενώ η  $(\varepsilon_2)$  το τέμνει και να προσδιορίσετε το σημείο τομής τους  $P$ .

(ii) Να δείξετε ότι οι δύο ευθείες είναι ασύμβατες.